

Dagli atti della conferenza CIEAEM 57, Palermo 27-29, Luglio 2005 sul tema:
I CAMBIAMENTI NELLA SOCIETA': UNA OPPORTUNITA' PER L'EDUCAZIONE MATEMATICA

UNA RICERCA-AZIONE ON LINE PER INTRODURRE I FRATTALI NELL'INSEGNAMENTO DI MATEMATICA DALLA SCUOLA PRIMARIA ALLA SECONDARIA

Adalberto Codetta Raiteri, OPPI, Milano, adalberto@codetta.it

0-Riassunto

The times they are changin'. Non così l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Forse è una caratteristica della matematica. I numeri arabi hanno impiegato secoli per diffondersi in Europa. La lentezza dei cambiamenti nella matematica che insegniamo a scuola può oggi influenzare l'orientamento scientifico degli studenti? Quali sono i più efficaci metodi per sperimentare e divulgare l'insegnamento di nuovi contenuti matematici? Nella conferenza CIEAEM 55 abbiamo suggerito l'introduzione dell'insegnamento dei frattali nella scuola primaria e secondaria¹. L'OPPI, Organizzazione Per la Preparazione Professionale degli insegnanti, ha cercato di sperimentare e divulgare questa proposta con metodi di ricerca-azione on line. La Ricerca Azione, iniziata nel mese di maggio 2004, è terminata nel giugno 2005: ha coinvolto 11 scuole tra primarie e secondarie. Si è svolta completamente a distanza senza incontri in presenza utilizzando una piattaforma e-learning. In una prima valutazione di questa esperienza, si riferisce sulle sperimentazioni di insegnamento-apprendimento dei frattali e si discute l'efficacia e i limiti di un metodo di ricerca educativa che consentirebbe la partecipazione degli insegnanti, per piccoli gruppi di lavoro, con impiego limitato di risorse.

1-Frattali come e perché

Mandelbrot ha pubblicato "Les objets fractals"² nel 1975 e "Fractals, Graphics & Mathematics education"³ nel 2002. In questi anni la visione della scienza è profondamente cambiata, ma non è così per la scienza come è pensata nelle scuole. La ricerca-azione ha lavorato per superare un'immagine della matematica legata al determinismo cercando di introdurre i concetti di complessità, di caos e di sistema. Ha introdotto metodi di modellizzazione matematica della realtà. I partecipanti alla ricerca, divisi in gruppi di lavoro dello stesso livello scolastico, hanno usato le risorse disponibili sul WEB, pianificato ed sperimentato in classe itinerari di studio degli oggetti frattali, documentato i risultati delle sperimentazioni, presentato i prodotti fatti dagli studenti.

I frattali necessitano di approcci multidisciplinari, possono essere studiati a differenti livelli scolastici per sviluppare molti argomenti matematici: geometria della natura, autosimilarità, logaritmi, funzioni complesse, funzioni ricorsive. Per esempio, gli studenti possono scoprire l'idea di auto-similarità esplorando direttamente alcuni frattali

¹ A. Codetta Raiteri, "Fractals as didactic material", CIEAEM 55 Proceedings, in "Quaderni di ricerca didattica" of GRIM, n 14, <http://math.unipa.it/~grim/quaderno14.htm>

² B. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino, 1987. (*Les object fractales*)

³ B. B. Mandelbrot, *Fractals, Graphics & Mathematical Education*, The Mathematical Association of America, 2002

pubblicati sul WEB, e, schematizzandoli, possono arrivare allo sviluppo di semplici modelli matematici di auto-similarità come la curva di Koch.

Vi sono molte ragioni per usare i frattali come stimolo di studio e nella scuola primaria e secondaria:

- I modelli frattali che sono usati per studiare molti problemi reali dalla medicina alla cinematografia
- I frattali presentano aspetti estetici che coinvolgono anche l'intelligenza emotiva degli studenti
- la vasta bibliografia pubblicata sul web, specialmente a fini didattici consente ricerche condotte direttamente dagli studenti
- l'aiuto dei computer permette agli studenti di maneggiare curve e concetti una volta riservati a matematici esperti
- la natura dei frattali fa percepire che anche in matematica "si inventa" piuttosto che "scoprire".

È davvero necessario far percorrere agli studenti ogni passo che l'umanità ha fatto per raggiungere certi concetti? Questa ricerca ha assunto, come ipotesi, che non è sempre necessario. Ha verificato che è possibile far sì che gli insegnanti programmino percorsi praticabili per presentare almeno alcuni aspetti di scienza corrente, anche agli studenti più giovani. Questi percorsi suggeriscono che è possibile modificare la situazione attuale in cui la motivazione dei giovani verso gli studi scientifici sta declinando e con essa anche il peso della cultura scientifica nella formazione delle nuove generazioni.

I frattali non sono esplicitamente citati nei programmi scolastici, ma molti argomenti matematici previsti dai programmi permettono la descrizione delle caratteristiche degli oggetti frattali. La ricerca ha identificato percorsi didattici che permettono agli studenti di esplorare queste caratteristiche legandole a concetti matematici presenti nei programmi scolastici.

2-Definizione di ricerca-azione on line

Accettiamo la seguente definizione di ricerca-azione *"ricerca-azione può essere descritta come una famiglia di metodologie di ricerca che perseguono il cambiamento e la comprensione allo stesso tempo. Nella maggioranza delle sue forme, fa ciò usando un processo ciclico o a spirale che oscilla tra azione e riflessione critica e negli ultimi cicli, rifinitura continua di metodi, dati e interpretazione alla luce della comprensione sviluppata nei cicli precedenti. È quindi un processo **emergente** che prende forma mentre la comprensione cresce, ed è un processo iterativo che converge verso una miglior comprensione di ciò che accade. Nella maggioranza delle sue forme, è anche partecipativo (tra le altre ragioni, un cambiamento è di solito più facile da comprendere quando coloro che sono affetti dal cambiamento sono coinvolti) e qualitativo."*⁴ La ricerca-azione può avere una varietà di tipologie. Abbiamo cercato di organizzare una ricerca pilota: *"La ricerca pilota tende ad esplorare un ambito predefinito in funzione di uno status acquisito della ricerca, in un dominio in cui si cominciano ad intravedere dimensioni interessanti ma in cui non sono state ancora messe a punto strategie, guidelines ecc., o si avverte la necessità di mettere in evidenza dimensioni o ipotesi più specifiche. Esiste dunque un focus dell'indagine, un certo numero di vincoli (in funzione di tipologie già definite) ma rimangono anche spazi autonomi di esplorazione per gli attori. Da questa*

⁴ Bob Dick, <http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/whatisar.html>, web site at Southern Cross University, Australia

ricerca si tende soprattutto a ricavare tipologie o repertori operativi trasferibili ad altre situazioni”⁵.

3-II clima della ricerca

I partecipanti alla ricerca vivono in più regioni d'Italia. Non sono stati previsti incontri a faccia a faccia. Ciò significa che i partecipanti non hanno fatto uso della grande ricchezza di informazioni che deriva dal contesto, dalla gestualità, dal tono di voce, dalla mimica. Il contesto in cui ciascuno ha partecipato alla ricerca è stato costruito con una piattaforma e-learning.

Siamo sempre più oppressi da una vita frenetica. Il potenziale di accesso ad internet aumenta l'ansia di partecipazione, di presenza, di estensione della conoscenza. Gli insegnanti, non avendo una netta separazione tra il lavoro e le ore personali, sono particolarmente esposti alla pressione globale della rete, e al conflitto con la ...vita reale di figli, coniugi, amici.

Internet non fa imparare più in fretta. L'eccessivo carico di sorgenti d'informazione, di link, di gente coinvolta richiede che si abbia consapevolezza delle operazioni metacognitive necessarie per costruire apprendimenti personali stabili e ben organizzati. L'insegnamento-apprendimento a distanza, on line, richiede distacco, calma, serenità, riflessione. Ciò riguarda gli studenti, e gli adulti. Ciononostante, le piattaforme di e-learning presentano i vantaggi dell'insegnamento asincrono: non c'è la necessità di essere fisicamente presenti a incontri sacrificando impegni personali e professionali, e si può scegliere il momento migliore per dedicarsi alla ricerca-azione, al confronto con i colleghi, alla riflessione e allo studio col solo scopo di una crescita personale e professionale.

4-Cronaca della ricerca-azione

La ricerca on line è iniziata il 21 maggio 2004 a seguito di brevi comunicazioni sul web in cui si invitava a prender parte ad una ricerca sui frattali; 74 insegnanti hanno mostrato interesse. Ognuno ha ricevuto un codice personale per accedere alla piattaforma on line. Su questa piattaforma gli insegnanti hanno trovato il documento base per la ricerca, un possibile modello di lavoro, numerosi links a siti dedicati all'insegnamento dei frattali, e l'opportunità di confrontarsi per mezzo di forum condividendo archivi di documenti.

Il documento base chiedeva ai partecipanti di presentare un progetto riferito su un modello condiviso, di sperimentarlo in classe e di presentare i risultati ottenuti. Il coordinatore della ricerca si assumeva la responsabilità di certificare il lavoro fatto e di dare assistenza. Il tutto sempre attraverso lavoro a distanza. La proposta è stata accettata soltanto da un limitato numero di insegnanti che hanno presentato un progetto; 23 insegnanti sono stati iscritti alla ricerca dai loro Dirigenti Scolastici e hanno presentato 15 progetti (1 nella scuola primaria, 6 nella secondaria di primo grado, 3 nel biennio della secondaria di secondo grado, 5 nel triennio). In alcuni progetti partecipano più insegnanti della stesso consiglio d classe.

⁵ A.Calvani, Ricerca azione on-line: Nuovi modelli per l'innovazione e sperimentazione educativa, http://www.educational.rai.it/corsiformazione/autonomia/mappa/rtf/29_ris_02b.rtf

Dalla analisi dei progetti e delle relazioni finali di ciascuna sperimentazione emergono due tipi di prodotti:

- Prodotti realizzati dagli insegnanti per gli studenti
- Prodotti realizzati dagli studenti durante o alla fine dell'itinerario di studio dei frattali.

Per consentire una interpretazione condivisa, al termine dell'itinerario di studio sui frattali, gli insegnanti hanno avuto l'opportunità di somministrare ad ogni studente coinvolto un questionario messo a disposizione sulla piattaforma di lavoro. Il questionario era focalizzato su una domanda: "cosa è, per te, un frattale?"⁶

Per ogni progetto, gli insegnanti hanno prodotto una relazione conclusiva ed allegato ad essa i materiali realizzati da loro stessi, dagli studenti e alcuni questionari esemplificativi. Questi materiali compongono la documentazione con cui si è descritta e valutata la ricerca.

5-Uno strumento di analisi

Al fine di confrontare le strategie degli insegnanti, è stato chiesto loro di adottare lo stesso stile di documentazione. Siamo così in grado di trasferire molte frasi-chiave che descrivono ciascuna sperimentazione in una tabella di comparazione.

Questa tavola è organizzata per età al fine di favorire il riconoscimento delle tendenze comuni emergenti da ciascuna sperimentazione.

5.1 Sperimentazioni nella scuola primaria e secondaria di secondo grado

Dalla tabella emerge una gran varietà di argomenti matematici connessi con i frattali. Gli insegnanti coi loro studenti hanno esplorato questa varietà di significati ed una accurata analisi mostra che nell'età 9-11 il focus è sulle trasformazioni geometriche, mentre dai 12-14 esso si sposta sui processi iterativi.

Scopi dell'insegnante	Obiettivi per gli studenti	Contenuti e percorsi
Studenti 9-10 anni-quarta elementare		
Contribuire alla formazione di una mentalità scientifica che sia flessibile e aperta. Far comprendere agli alunni che molti modelli e molta "matematica" è formulata allo scopo di rappresentare il mondo reale	Capire le proprietà dei triangoli nella geometria euclidea. Capire i concetti di traslazione, rotazione, simmetria assiale e centrale, omotetia, similitudine. Costruire frattali: fiocco di neve di Koch, triangolo di Sierpinsky. Capire il significato di auto-similarità	Esempi animati per la costruzione di frattali, spiegati e commentati con l'uso di filastrocche. Studio dei triangoli nella geometria euclidea. Osservazione del triangolo di Sierpinsky e di curve famose come la cardiode, la curva di Peano, di Koch. Costruzione di oggetti frattali. Comprensione del concetto di auto-similarità. Materiali: filastrocche che descrivono il processo di costruzione di un frattale, animazioni elettroniche, mappe cognitive che rappresentano il processo di apprendimento dello studente, software Logo e Fractint
Studenti 11-12 ; primo grado scuola secondaria; primo anno		
Iniziare il processo di matematizzazione di oggetti reali. Formulare di domande. Ricercare risposte. Stimolare l'abilità degli studenti di scomporre un problema in sotto-domande e di organizzare osservazioni in sequenza logica per affrontare problemi complessi.	Capire il concetto di forma. Ricerca delle regolarità. Riconoscere le figure geometriche dalle proprietà che le caratterizzano. Riconoscere le proprietà invarianti all'interno di una trasformazione. Acquisire un linguaggio corretto al fine di riferire le esperienze condotte.	Visualizzazione di oggetti tridimensionali da rappresentazioni bidimensionali: sezione piana. Introduzione alla topologia, linea aperta, linea chiusa, linee connesse. Striscia di Moebius, curva di Peano. Trasformazioni geometriche: simmetria assiale e rotazione. Concetti di forma e di auto-similarità. Processo iterativo: manipolazioni usando carta, uso di software. Esperienze di geometria nell'osservazione della natura: disposizione delle foglie, rappresentazione di una foglia considerando le sue proprietà invarianti. Modello di una foglia: la felce. Attività di osservazione e manipolazione; navigazione sul web. Software: Cabri

⁶ A. Codetta, G. Cappucci, G. Cazzaniga, "Lo zero e il senso comune. Indagine sulla provvisorietà di un insegnamento disciplinare". Armando Editore, Roma, 2001, pagg. 34-42

Studenti 12-13, primo grado scuola secondaria; secondo anno		
Stimolare interesse e motivazioni negli studenti al fine di accrescere e sviluppare abilità intuitive e creative. Suscitare abilità di osservazione riguardo fatti e fenomeni della realtà.	Captare analogie e differenze, sia varianti che invarianti. Affrontare problemi complessi scomponendoli in sottoproblemi. Usare il concetto di misura all'interno di differenti contesti. Usare linguaggio e tecnologie informatici. Usare mappe concettuali. Vedere il lato artistico ed estetico di una figura geometrica.	Fare modelli matematici: osservazione di figure regolari della realtà (foglia di felce). Fare modelli all'interno della geometria euclidea. Nascita della geometria frattale come modello per osservare e rappresentare la realtà. Ricerca di figure frattali: presentazione con uso di software. Riassunto del metodo SEW-COM per ricerca sul web. Ricerca su internet di siti sui frattali. Concetti di dimensioni, perimetro, area: perimetro di alcune figure piane, perimetro di una costa marina. Costruzione, con l'uso di CABRI, di un albero e di un fiocco di neve. Analisi di figure frattali fatte da artisti. Uso di software FRACTIN, IFS, FRACTAL, EXPLORER.
Studenti 13-14; primo grado scuola secondaria; terzo anno		
Stimolare l'abilità degli studenti ad affrontare problemi più complessi componendoli in sottoproblemi. Indurre gli studenti a capire e usare linguaggi specifici nei campi scientifico, tecnico e multimediale. Guidare gli studenti nella selezione di dati e informazioni a seconda dell'obiettivo dato.	Comprendere la caratteristica di ogni frattale: la auto-similarità. Descrivere la struttura modulare di un frattale. Connettere sequenze ricorsive ad algoritmi ricorsivi. Realizzare la struttura di base di un frattale usando il software CABRI. Disegnare semplici frattali con algoritmi ricorsivi usando macro di CABRI. Capire i frattali come modello interpretativo della realtà. Analizzare perimetro e area di alcune figure frattali. Capire e calcolare dimensioni di una curva frattale.	Studio storico: il problema delle forme "irregolari" nella realtà che non possono essere descritte con la geometria classica e la ricerca di nuove teorie. Scoperta delle principali caratteristiche di queste forme irregolari: sono composte di strutture ripetitive che possono essere viste, descritte e riprodotte. Ricerca guidata dei frattali sul web. Presentazione di frattali come modello interpretativo della natura che spiega la realtà attraverso un algoritmo. Osservazione e realizzazione, con CABRI, di curve frattali. Introduzione circa il concetto di dimensione frattale come numero razionale, confronto con le figure classiche come numeri interi. Ricerca, con EXCEL, della dimensione frattale di curve realizzate. Ricerca di figure frattali nell'arte moderna e contemporanea, in collaborazione con l'insegnante di arte

5.2 Sperimentazione nella scuola secondaria di secondo grado

I docenti hanno adattato gli argomenti connessi con i frattali agli scopi delle istituzioni scolastiche di appartenenza. I frattali possono essere adattati con facilità a coprire una gran varietà di competenze, come si vede confrontando le esperienze in scuole tecniche, scientifiche, artistiche, professionali. Gli insegnanti, lavorando con gli studenti dai 14 ai 19 anni, hanno gradualmente spostato il centro di attenzione dalle trasformazioni geometriche e dai processi iterativi, alla loro implementazioni in linguaggi di programmazione. Inoltre sono stati presi in considerazione gli aspetti culturali e scientifici dei frattali. L'altissimo numero di siti WEB che propongono approcci differenti e creativi allo studio dei frattali, ha suggerito ai docenti di unire lo studio dei frattali con riflessioni sui metodi di ricerca sul WEB.

Scopi dell'insegnante	Obiettivi per gli studenti	Contenuti e percorsi
Studenti 14-15 anni- istituto professionale, primo anno		
Uso di ICT per sperimentare percorsi didattici personalizzati Stimolare l'uso di software in geometria collegandolo alle capacità di descrivere, riflettere esperienze. Sviluppare stili di insegnamento cooperativi attraverso il metodo problem-solving.	Sviluppare l'intuizione spaziale. Approfondire la conoscenza di base geometrica	Rivedere, con CABRI, i concetti di triangolo, poligono, perimetro, area,... Usare e comprendere, le macro in CABRI Capire il concetto di trasformazione geometrica Studiare e descrivere le caratteristiche del fiocco di neve e del triangolo di Sierpinsky. Creare alcune forme frattali.

Studenti 14-15; liceo artistico, primo anno		
Presentare un'idea viva della matematica. Usare le risorse CT (Information Communication Technology) per rendere gli studenti protagonisti del loro apprendimento di geometria Promuovere un approccio interdisciplinare connettendo matematica e arte. Promuovere la comprensione e la comparazione di linguaggi usati in differenti campi della conoscenza	Usare le risorse ICT per studiare, generare, visualizzare oggetti frattali. Selezionare informazioni sul WEB col metodo SEWCOM. Connettere differenti informazioni attraverso appropriati modelli di interpretazione. Organizzare e rappresentare le conoscenze acquisite con mappe concettuali e reti di mappe.	Caratteristiche degli oggetti frattali e argomenti matematici correlati: auto-similarità, trasformazioni geometriche, algoritmi, funzioni iterative, attrattori frattali. Campi di conoscenza che usano frattali. Alcuni famosi oggetti frattali: set di Mandelbrot, rete di Sierpinsky. Storia dei frattali e autori. Frattali e arte, natura e tecnologia.
Studenti 16-17 anni; liceo scientifico, terzo anno		
Promuovere l'abilità di trovare informazioni nel contesto ICT. Far capire agli studenti i differenti strumenti e metodi per cercare informazioni..	Conoscere e usare il metodo SEWCOM per selezionare informazioni Comprendere l'importanza dei frattali come modello di fenomeno scientifico. Inserire la teoria di frattali nello sviluppo attuale della ricerca matematica.	Storia dei frattali Applicazioni pratiche dei frattali. Studio di oggetti frattali famosi Costruzione con CABRI del triangolo di Sierpinsky e del fiocco di neve. Realizzazione di programmi Pascal per il calcolo dell'area dei triangoli di Sierpinsky e del perimetro del fiocco di neve.
Studenti 17-18 anni; liceo scientifico, quarto anno		
Applicare il programma di matematica usuale in un nuovo campo suscettibile di affascinare gli studenti Promuovere l'abilità di selezionare e trovare informazioni sul WEB Sviluppare uno stile autonomo di lavoro.	Usare mappe concettuali e reti di mappe per descrivere e riorganizzare la conoscenza acquisita nella ricerca scolastica Usare le risorse ICT per trovare e comunicare informazione. Conoscere e usare modelli matematici in vari contesti.	Scoperta della auto-similarità attraverso l'analisi di frattali con Tierazon. Misura della lunghezza di una costa, dimensione frattale. Trasformazioni geometriche: studio di Sierpinsky, Kock e altri frattali IFS. Funzioni ricorsive: disegno di una figura frattale scrivendo un programma Pascal Logaritmo: dimensione di oggetto frattale Numeri complessi: studio del set di Mandelbrot e dei frattali Julia Probabilità: frattali non deterministici Applicazioni di geometria frattale.
Studenti 17-18 anni; istituto tecnico, quarto anno		
Potenziare l'attitudine a fare un'analisi critica sulle conoscenze acquisite Sviluppare abilità pratiche di fare modelli matematici	Comprendere la caratteristica della geometria frattale, le differenze e le invarianze rispetto alla geometria euclidea Scomporre un problema in sotto-problemi	Progettare frattali con procedure ricorsive, distinguendo frattali IFS e LS Creare frattali con differenti linguaggi di programmazione
Studenti 18-19 anni; istituto tecnico, quinto anno		
Presentare un'idea di matematica che superi vecchi problemi usando problemi nuovi e reali. Sviluppare abilità a valutare differenti linguaggi di programmazione in ordina alla soluzione di diversi problemi.	Comprendere le caratteristiche della geometria frattale, differenze e invarianze con la geometria euclidea Analizzare applicazioni utili e inutili dei frattali Conoscere e usare il metodo SECOM per trovare e selezionare informazioni	Triangolo di Sierpinsky, teoria dei frattali IFS, frattali LS, dimensione frattale. Creare frattali con Pascal, C++, Java, Cabri, Excel, distinguendo quelli IFS e quelli LS. Progettazione di un sito WEB sui frattali

6 Conclusioni

Gli insegnanti hanno prodotto una grande varietà di materiali didattici sui frattali: lezioni, guide, problemi, mappe concettuali, questionari, software didattici, test,...perfino poesie! Anche gli studenti hanno contribuito a questa abbondanza: disegni a mano libera, al computer, costruzioni geometriche, articoli, ipertesti, programmi per computer, siti web, sitografie,... Questi materiali, a causa della loro ricchezza e complessità, non sono stati ancora completamente esaminati e classificati. Una analisi più approfondita potrebbe dare molte indicazioni per l'introduzione dei frattali ad ogni livello di scuola e per la progettazione di corsi di formazione per docenti. Al livello attuale, questa ricerca on-line può formulare le seguenti indicazioni:

- I frattali possono essere studiati ad ogni livello scolastico
- I frattali offrono molte opportunità di fare "buona matematica"
- I modelli matematici dei frattali piacciono agli studenti e spingono alcuni di loro ad approfondire argomenti matematici
- I frattali possono essere studiati con approcci euristici a partire da problemi reali
- I frattali danno agli insegnanti di matematica un ruolo importante nelle attività interdisciplinari che sono sempre più richieste dal sistema scolastico
- Lo studio dei frattali necessita di interazione WEB e di lavoro di gruppo. In questo modo lo studio dei frattali stimola comportamenti che aiutano la ricerca attiva sia nei docenti che negli studenti
- I frattali possono essere studiati all'interno degli ordinari programmi di matematica: trasformazioni geometriche, sequenze infinite, serie infinite, funzioni ricorsive, logaritmi, numeri complessi, probabilità...

Questa ricerca si è svolta completamente on line. Gli insegnanti elencati nel paragrafo seguente hanno lavorato insieme per oltre un anno senza incontrarsi. È stato un ambiente di lavoro nuovo per una gran parte dei docenti coinvolti. Le difficoltà di questo inedito contesto sono state superate in modo soddisfacente: la quasi totalità dei docenti che ha aderito alla proposta ha progettato e posto in atto una sperimentazione personale ma coerente con gli indirizzi generali. Dalle tabelle descrittive delle sperimentazioni emergono infatti significative continuità tematiche maturate spontaneamente nell'interazione del lavoro distanza. Va tuttavia riconosciuto che il livello di partecipazione, di interazione, di scambio dei materiali è stato disomogeneo. Ciò da un lato costituisce un limite "fisiologico" che si manifesta anche nei gruppi di lavoro in presenza, dall'altro un punto d'attenzione per le responsabilità del coordinatore al quale compete una specifica responsabilità tutoriale: lo scambio di esperienze professionali, a distanza, in forma scritta, è molto più impegnativa che in presenza e in forma orale. La presentazione di ipotesi, proposte, materiali è una operazione che attiva nei partecipanti comprensibili preoccupazioni su come esse verranno accolte, discusse, interpretate da persone che non si conoscono. La presenza di funzioni tutoriali in questo tipo di attività va pertanto adeguatamente definita e rinforzata.

I risultati di questa ricerca mostrano che un lavoro cooperativo supportato da piattaforme e-learning apre interessanti opportunità per sviluppare i ruoli professionali dei docenti. Primo Brandi e Anna Salvatori, "Progetto Innovamatica" Università di Perugia, Dipartimento Matematica e Informatica, hanno supportato la ricerca dando assistenza e consigli, essi hanno inoltre partecipato al comitato scientifico con Stefania Marangoni, Renza Cambini e Laura Lotti. Il coordinatore li ringrazia, e ringrazia tutti gli insegnanti e i dirigenti delle scuole partecipanti. Ringrazia in particolare Dorianò Azzera, manager della piattaforma Claroline, che ha ospitato la ricerca nell'open campus dell'IPSIA "Castigliano" di Asti e il dirigente Ugo Rapetti.

7 Insegnanti e classi partecipanti

Nome insegnanti	Materia	Classe	Età	Istituto
Ivana Niccolai	Matematica. Scienze	Classe 4	8-10	Scuola Primaria "G. Garibaldi", GE
Letizia Corniani	Scienze mat, fis, chim, nat	Classe 1	11-12	Istituto Comprensivo I Suzzara, MN
Ernestina Prada Gianfranco Damiano Chiara Maggioni	Scienze mat, fis, chim, nat Lettere Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo Barlassina, MI
Susanna Abbati Rosella Grezzi	Scienze mat, fis, chim, nat Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo "Rodari", Baranzate, MI
Gianpaolo Maran Vincenzo Trabona	Scienze mat, fis, chim, nat Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo 7 Vicenza
Mariarosa Sanfelici	Scienze mat, fis, chim, nat	Classe 2 Classe 3	12-13 13-14	Scuola Media "B. Croce" Gonzaga, MN
Marzia Galafassi Carla Tabai	Matematica e TIC Matematica e TIC	Classe I Classe I	14-15 14-15	Istituto d'istruzione Superiore "S. G. Bosco" Viadana, MN
Luca Vampa Renata Casagrande Giovanna da Col	Matematica e informatica Discipline pittoriche Discipline geometriche	Classe I	14-15	Istituto Statale d'Arte "Bruno Munari", Vittorio Veneto, TV
Adriana Minocci	Matematica	Classe III	16-17	Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (VB)
Anna Vendittelli Gianluca Tiengo	Matematica Laboratorio Matematica	Classe IV	17-18	Istituto Tecnico Industriale "E. Majorana" Cassino, FR
Marina Celora Antonella Montrezza Carmen Giovanelli Vitaliano Caimi	Matematica e Fisica Matematica e Fisica Scienze Filosofia	Classe IV Classe IV	17-18 17-18	Liceo Scientifico "A. Tosi" Busto Arsizio, VA
Antonella Trevisol	Matematica	Classe V	18-19	Istituto Tecnico Industriale "Cartesio" Cinisello Balsamo (MI)

8 Sitografia

Michael Frame, Benoit Mandelbrot, and Nial Neger, Yale University, Fractal Geometry;
<http://classes.yale.edu/Fractals/>

Pattern Exploration: Integrating Math and Science for the Middle School;
http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher_homepage.htm

Cynthia Lanius, A Fractals Unit for Elementary and Middle School Students, Rice University;
<http://math.rice.edu/~lanius/frac/index.html>

Patterns in nature; Centre in polymer studies; <http://polymer.bu.edu/ogaf/index.html>

Laura Lotti; <http://www.frattali.it/>

Giorgio Pietrocola; <http://www.maecla.it/tartapelago.htm>

9 Software

Fractint; <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

Tierazon; <http://home.houston.rr.com/fergusonsc/Tierazon-v29/>

Flarium 24; <http://ktaza.com/fractal/>

Fractal Explorer; <http://www.eclstasy.com/Fractal-Explorer/>