PASCUT3

Cut-E-CBA

UNA NOTA SULLE SERIE DIVERGENTI E LORO UTILIZZAZIONE

(A note on divergent series and their utilization)

di Pasquale Cutolo
p.cutolo@inwind.it

SOMMARIO

Con il presente lavoro viene affrontato lo studio di relazioni riguardanti serie divergenti, soprattutto quelle con termini a segni alterni, e della loro utilizzazione.

ABSTRACT

With this work we examine the study of relations concerning divergent series, particularly those having powers with alternate signs, and their utilization.

1.00 Introduzione

Una serie si dice divergente quando non è convergente.
Le serie divergenti più comunemente note sono:

$$1-1+1-1+\ldots=\sum_{k\geq 0}(-1)^k \tag{1.01}$$

$$1+1+1+1+\ldots=\sum_{k\geq 0}k^0 \tag{1.02}$$

$$1-2+3-4+\ldots=\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k \tag{1.03}$$

$$1+2+3+4+\ldots=\sum_{k\geq 1}k \tag{1.04}$$

$$1-3+6-7+\ldots=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1) \tag{1.05}$$

$$0!-1!+2!-3!+\ldots=\sum_{k\geq 0}(-1)^k k! \tag{1.06}$$

Oltre le serie predette, esamineremo serie divergenti che presentano particolari caratteristiche.

Il grande matematico norvegese Niels Henrik **Abel,** (1802 – 1829), riferendosi alle serie divergenti, nel 1826 scrisse così al suo maestro Holmboë: “Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c’est une honte qu’on ose y fonder aucune démonstration…la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie, les résultats sont justes, il est vrai, mais c’est là une chose bien étrange. Je m’occupe à en chercher la raison, problème très intéressant”

Il grande matematico francese, Augustin Louis **Cauchy**, (nato a Parigi il 21 agosto 1789, morto a Sceaux (Seine) il 23 maggio 1857), nella prefazione alla sua “Analyse Algébrique”, nel 1821, scrisse: “ J’ai été forcé d’admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures: par exemple, qu’une série divergente n’a pas de somme”(vedasi **Bromwich**, testo [2], pagg. 320 e 321).

J. E. Littlewood, (John Edensor **Littlewood**, Regno Unito, nato il 09.06.1885, morto il 06.09.1977), nella sua prefazione al testo [1] rivela che Abel, nel 1828, scrisse: “Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever”.

2.00 Consideriamo la serie:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad , \tag{2.01}$$

La serie (2.01) è convergente per $|x|<1$, ed è divergente per $x \geq 1$.

Ponendo, nella (2.01), $x = 1-\varepsilon$, con $\varepsilon>0$, piccola a piacere, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (1-\varepsilon)^k = \frac{1}{1+(1-\varepsilon)} \tag{2.02}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$, dalla (2.02) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k = 1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2} \tag{2.03}$$

La serie $1-1+1-1+\ldots$ è tale che la somma dei primi 2n termini è uguale a zero, mentre la somma dei primi 2n+1 termini è uguale a 1.

Se indichiamo con s la serie

$$1-1+1-1+\ldots = s,$$

possiamo scrivere:

$$s = 1-(1-1+1-1+\ldots) = 1 - s, \quad \text{da cui} \quad s = \frac{1}{2}$$

Ritroviamo così la (2.03)

Derivando la (2.01), rispetto ad x, otteniamo: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k x^{k-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$;

sostituendo k-1 a k, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (k+1)x^k = \frac{1}{(1+x)^2} \tag{2.04}$$

Ponendo, $x = 1 - \varepsilon$, e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (k+1) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} k = 1-2+3-4+\ldots = \frac{1}{4} \tag{2.05}$$

(vedasi G. H. Hardy, Testo [1], pag.3), (Godfrey Harold **Hardy**, nato a Cranleigh, Inghilterra, il 07.02.1877, morto a Cambridge, Inghilterra, il 01.12.1947).

3.00 La serie (2.01), come abbiamo detto, è divergente per $x \geq 1$.

Esaminiamo l’integrale

$$A = \int_0^\infty e^{-y(x+1)} dy \tag{3.01}$$

L'integrale A è chiaramente convergente per Re(x) > -1,

ed è quindi convergente anche per x>1.

Infatti, ponendo, nella (3.01), y(1+x) = z, abbiamo:

$$A = \int_0^\infty e^{-y(x+1)} dy = \frac{1}{1+x}\int_0^\infty e^{-z} dz = \frac{1}{1+x} \tag{3.02}$$

Ricordando che la relazione $e^{-yx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-yx)^k}{k!}$

è valida per qualunque valore di x e y, ricaviamo:

$$A = \sum_{k\geq 0} \frac{(-x)^k}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-y} dy = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \tag{3.03}$$

La (3.03) è, perciò, da ritenere vera anche per x>1.

Possiamo, pertanto, affermare che la serie indicata al 1° membro della (2.01)

è divergente per $x \geq 1$, ma è rappresentata da $\frac{1}{1+x}$

In generale, come rimarcava Cauchy, "la proprietà caratteristica delle serie alternate è rivelata dalla serie geometrica seguente:

$$\frac{1}{c+t} = \frac{1}{c} - \frac{t}{c^2} + \frac{t^2}{c^3} - \frac{t^3}{c^4} + \dots, \qquad c>0, \quad t>0 \tag{3.04}$$

che è vera non solo quando converge, ma anche per ogni arbitrario positivo valore di c e t ". Riscrivendo la (3.04) con il resto, nella forma:

$$\frac{1}{c+t} = \frac{1}{c} - \frac{t}{c^2} + \frac{t^2}{c^3} - \frac{t^3}{c^4} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{c^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{c^{n+2}} \frac{1}{1+\frac{t}{c}}, \tag{3.05}$$

essa è vera senza eccezioni (vedasi Knopp, Testo [3], pag. 534), (Konrad Hermann Theodor **Knopp,** nato a Berlino il 22.07.1882, morto ad Annecy, Francia, il 20.04.1957).

3.01 Integrazione per le serie divergenti

Se una serie, $\sum_{n\geq 0} A_n \frac{x^n}{n!} = f(x)$, è divergente, per x>a, (a, costante), moltiplicando, ambo i membri della predetta relazione, per e^{-x}, ed integrando, rispetto ad x, tra i limiti zero ed infinito, otteniamo un'altra serie divergente, definita da:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

3.02 Ora, poiché, per x>1, il 1° membro della (2.01) diverge, applicando, alla (2.01), l'integrazione di cui al punto **3.01**, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^k dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx\,,$$

cioè:
$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k! = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx \qquad (3.06)$$

L'integrale del 2° membro della (3.06) l'abbiamo ottenuto utilizzando l'integrazione per parti dell'integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$; abbiamo cioè:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx = \int_0^\infty e^{-x}d\ln(1+x) = \left[e^{-x}\ln(1+x)+\int e^{-x}\ln(1+x)dx\right]_0^\infty = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx$$

Non è difficile calcolare l'integrale indicato nel 2° membro della (3.06) ; infatti:

$$B = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx = (1+x=y) = e\int_1^\infty e^{-y}\ln y dy =$$
$$= \mathrm{e}\left[\int_0^\infty(\ln y)e^{-y}dy - \int_0^1(\ln y)e^{-y}dy\right] = \mathrm{e}(\mathrm{B1}-\mathrm{B2})$$

L'integrale
$$\mathrm{B1}=\int_0^\infty e^{-y}\ln y dy = \lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon\left[\int_0^\infty y^\varepsilon e^{-y}dy\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon\Gamma(\varepsilon+1) =$$
$$=\Gamma'(1)=\Psi(1)=-\gamma\,,$$

essendo, $\gamma = 0{,}5772156649$, la ben nota costante di Eulero-Mascheroni, e,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\,,\ \mathrm{Re}(z)>0,$$

è la ben nota Funzione di Eulero di seconda specie; $\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$,

(Leonardo **Euler**, nato a Basilea il 15 aprile 1707, morto a San Pietroburgo il 7 settembre 1783).
(Lorenzo **Mascheroni,** nato a Castagneta, Bergamo, il 13.05.1750, morto a Parigi il 14.07.1800).
L'integrale

$$\mathrm{B2}=\int_0^1(\ln y)e^{-y}dy = (\mathrm{y}=e^{-z}) = \int_\infty^0(-z)e^{-e^{-z}}e^{-z}(-dz) =$$
$$=-\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty ze^{-z(k+1)}dz = -\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}$$

Pertanto:
$$\mathrm{B} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx = -e\Big(\gamma+\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\Big)\,, \qquad (3.07)$$

Dalla (3.06) e (3.07) facilmente ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k! = -e\Big(\gamma+\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\Big) = 0{,}596347, \qquad (3.08)$$

che è perfettamente identica alla formula riportata da Hardy, (vedasi Testo [1], pagg. 27-28).

3.03 Ricordiamo la nota relazione $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)$ (3.09)

Il 1° membro della (3.09) rappresenta una serie che converge per $|x|\leq 1$, e diverge per x>1. Pertanto, applicando, alla (3.09), l'integrazione di cui al punto **3.01**, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k-1)! = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx,$$

da cui, sostituendo k-1 a k, troviamo: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k k! = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx$,

relazione perfettamente identica alla (3.06).

3.04 Consideriamo, ora, la serie:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k!\,x^k = 0! - 1!x + 2!\,x^2 - 3!\,x^3 + \ldots \qquad (3.10)$$

La serie (3.10), per x>1, è certamente divergente.

Il 1° membro della (3.10) è pari a: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k k! = \sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k \int_0^\infty t^k e^{-t}dt$ (3.11)

Applicando la (3.04), otteniamo: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k k! = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}dt$ (3.12)

Eulero, nella sua corrispondenza con Nicholas Bernoulli, dimostra che la serie $x\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k k!$ soddisfa formalmente l'equazione differenziale:

$x^2\frac{dy}{dx} + y = x$, da cui egli ottiene l'integrale

$y = \int_0^x e^{(\frac{1}{x})-(\frac{1}{\zeta})}\frac{d\zeta}{\zeta}$; sostituendo in quest'ultimo integrale $\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{x} = t$,

ricava facilmente l'integrale y=$\int_0^\infty \frac{xe^{-t}}{1+tx}dt$ (vedasi Bromwich, Testo [2], pag 323).

Pertanto, risulta verificata la (3.12) per ogni x positivo, e quindi anche per x>1.
Osserviamo che l'integrale seguente:

C = $-a\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{t+bx}$ soddisfa l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + by$, b>0

La soluzione della predetta equazione differenziale è data da:

y = $-\frac{a}{bx}\left[1 - \frac{1}{bx} + 2!\left(\frac{1}{bx}\right)^2 - 3!\left(\frac{1}{bx}\right)^3 + \ldots\right] = -\frac{a}{bx}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{k!}{(bx)^k}$, la quale è

rappresentata dall'integrale: C = $-a\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{t+bx}$ (vedasi Bromwich, Testo [2], pag. 349).

3.05 Riprendiamo la serie (2.01) $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$

Deriviamo ambo i membri della precedente, n volte, rispetto ad x. Operando, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n)}x^{k-n} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)}\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \tag{3.13}$$

Per k compreso tra 0 e n-1, i termini corrispondenti del 1° membro della (3.13) sono nulli;

infatti, per ogni k<n, $\frac{1}{\Gamma(k+1-n)} = \frac{1}{\infty} = 0$; pertanto, ponendo, nella (3.13), k-n=h, abbiamo:

$$\sum_{h\geq 0}(-1)^{h+n}\frac{\Gamma(h+n+1)}{\Gamma(h+1)}x^h = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

da cui ricaviamo: $$\sum_{h\geq 0}(-1)^h\binom{n+h}{h}x^h = \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \tag{3.14}$$

Per il calcolo della derivata di ordine n, rispetto a x, di (x^k) e di $(1+x)^{-1}$,

abbiamo utilizzato, rispettivamente, le formule:

$$D_x^{(n)}x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-n)}x^{k-n}, \qquad D_x^{(n)}(1+x)^{-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)}(1+x)^{-1-n}(-1)^n \tag{3.15}$$

La relazione (3.14) è ben nota, ed è valida per $|x|<1$.

Il 1° membro della (3.14) costituisce una serie che è divergente per $x \geq 1$,
ma è rappresentata dal 2° membro della medesima (3.14).
Quindi, applicando, alla (3.14), l'integrazione di cui al punto **3.01**,

otteniamo: $$\sum_{h\geq 0}(-1)^h\binom{n+h}{h}\int_o^\infty x^h e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1+x)^{n+1}}, \text{ cioè}$$

$$\sum_{h\geq 0}(-1)^h\binom{n+h}{h}h! = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1+x)^{n+1}}, \text{ da cui}$$

$$\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^h(n+h)!}{n!} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1+x)^{n+1}} \tag{3.16}$$

Ponendo, n=0, nella (3.16), ritroviamo la (3.06).
Il 1° membro della (3.16) costituisce un'altra serie divergente, rappresentata,
per ogni n intero positivo, dal valore finito dell'integrale del 2° membro della (3.16).

L'integrale E = $\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1+x)^{n+1}}$ l'abbiamo calcolato con diversi metodi nell'Appendice A.

Il 1° membro della (3.16) possiamo trasformarlo nel seguente modo:

$$\sum_{h\geq 0}(-1)^h\binom{n+h}{h}h! = \sum_{h\geq 0}(-1)^h\frac{(n+h)!}{n!} = (\text{n+h = k}) = \sum_{k\geq n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\left[\sum_{k\geq o}(-1)^k k! - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k!\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! + \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k\geq 0}(-1)^k \int_0^\infty x^k e^{-x}dx$$

Utilizzando la (3.06), e tenendo presente la (3.16), ricaviamo:

$$E = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{1+x} \qquad (3.17)$$

La (3.17) è una relazione reale, valida per n>0, **ed è una formula ottenuta, efficacemente, utilizzando serie divergenti.**

Il risultato fornito dalla (3.17) è conforme a quelli ottenuti con i metodi applicati nell'Appendice A.

3.06 Riprendiamo la relazione (3.12) $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k k! = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}dt$

Abbiamo detto che essa risulta verificata per ogni x>1.
Pertanto, applicando, alla (3.12), l'integrazione di cui al punto **3.01**, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k k!\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}dt \text{, cioè}$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (k!)^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+xt}dtdx \qquad (3.18)$$

L'integrale doppio, $F = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+xt}dtdx$, indicato nel 2° membro della (3.18),

possiamo trasformarlo ottenendo il seguente risultato:

$$F = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+xt}dtdx = 4\int_0^\infty te^{-2\sinh t}dt \qquad (3.19)$$

La trasformazione dell'integrale doppio è riportata nell'Appendice B, punto 1).

Pertanto: $$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (k!)^2 = 4\int_0^\infty te^{-2\sinh t}dt \qquad (3.20)$$

L'integrale indicato nella (3.20) è convergente; infatti, osserviamo che per t compreso tra zero ed infinito, sinht >t, e quindi

$$4\int_0^\infty te^{-2\sinh t}dt < 4\int_0^\infty te^{-2t}dt = 1$$

In definitiva il 1° membro della (3.20) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore finito dell'integrale indicato al 2° membro della (3.20).

Il valore numerico del 2° membro della (3.20) è uguale a 0,668091.

4.00 Sui numeri di Bernoulli
(Jacob **Bernoulli**, nato a Basilea il 27.12.1654, morto ivi il 16.08.1705)

E' noto che

$$e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots=\sum_{k\geq 1} e^{-kx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^{x}-1}, \qquad (4.01)$$

Moltiplicando, per xe^{-px}, i membri della (4.01), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1} xe^{-(k+p)x}=\frac{xe^{-px}}{e^{x}-1}, \qquad p\geq 0, \qquad (4.02)$$

Ricordiamo che: $\frac{x}{e^{x}-1}=\sum_{k\geq 0} B_k\frac{x^k}{k!}$, (4.03)

essendo, B_k, i ben noti numeri di Bernoulli, i cui primi valori sono dati da:

$$B_0=1, B_1=\frac{-1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_4=\frac{-1}{30}, B_6=\frac{1}{42}; \qquad B_{2k+1}=0 \quad \text{per k=1, 2, 3,...}$$

La (4.03) è convergente per $|x|<2\pi$, ed è divergente per $|x|\geq 2\pi$.

Sostituendo la (403) nella (4.02),

ricaviamo: $$\sum_{k\geq 1} xe^{-(k+p)x}=\frac{xe^{-px}}{e^{x}-1}=\sum_{k\geq 0} B_k\frac{x^k e^{-px}}{k!} \qquad (4.04)$$

Derivando i membri della (4.04), n volte, rispetto a x, e ponendo dopo, x=0, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x)^{(j)}(e^{-(k+p)x})^{(n-j)}=\sum_{k\geq 0} B_k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(x^k)^{(j)}(e^{-px})^{(n-j)}}{k!} \qquad (4.05)$$

Nel punto x = 0, il valore di $x^{(j)}$ è diverso da zero solamente quando j=1, mentre il valore di $(x^k)^{(j)}$ è diverso da zero solamente quando j=k.

Pertanto, dalla (4.05) otteniamo: $$n\sum_{k\geq 1}(-1)^{n-1}(k+p)^{n-1}=\sum_{k\geq 0} B_k\binom{n}{k}\frac{k!(-p)^{n-k}}{k!}$$

da cui: $$\sum_{k\geq 1}(k+p)^{n-1}=-\frac{1}{n}\sum_{k\geq 0} B_k\binom{n}{k}(-1)^k p^{n-k} \qquad (4.06)$$

dove p, ripetiamo, rappresenta un qualsiasi numero reale non negativo, ($p\geq 0$).

Esamineremo vari casi.

a) Caso di p = 0

Per p = 0, $p^{n-k}\neq 0$ solo quando k = n.

Quindi, dalla (4.06) otteniamo: $$\sum_{k\geq 1} k^{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}B_n \qquad (4.07)$$

Per n = 2m+1, (m = 1,2,3,…), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1} k^{2m}=\frac{B_{2m+1}}{2m+1}=0, \qquad \text{in quanto } B_{2m+1}=0$$

cioè, $$1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\ldots=0 \qquad (4.07a)$$

Introduciamo la Funzione Zeta di Riemann (Georg Friedrich Bernhard **Riemann**, nato a Breselenz, nell'Hannover, il 17.09.1826, morto a Selasca, sul Lago Maggiore, il   20.06.1866),

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + ... = \sum_{k\geq 1} k^{-s}\,, \qquad \mathrm{Re}(s)>1 \qquad (4.08)$$

Per la (4.07a) abbiamo: $\zeta(-2m) = 0$

Per n = 2m, dalla (4.06) troviamo: $\zeta(1-2m) = \sum_{k\geq 1} k^{2m-1} = -\dfrac{B_{2m}}{2m}$, cioè

$$\zeta(1-2m) = 1^{2m-1} + 2^{2m-1} + 3^{2m-1} + ... = -\frac{B_{2m}}{2m} \qquad (4.09)$$

(vedasi Testo [4], pag. 1074).

Ponendo, nella (4.08), s=0, troviamo: $\zeta(0) = 1+1+1+... = \sum_{k\geq 1} k^0$

Nell'Analisi Matematica si dimostra che: $\zeta(0) = 1+1+1+... = \sum_{k\geq 1} k^0 = -\dfrac{1}{2}$ (4.09a)

(vedasi Testo [5], pag. 104).

Se poniamo, nella (4.07), n=1, ritroviamo la (4.09a)

Ponendo nella (4.09), m=1, troviamo $\zeta(-1) = \sum_{k\geq 1} k = -\dfrac{B_2}{2} = -\dfrac{1}{12}$

cioè, $1+2+3+\ldots = -\dfrac{1}{12}$ (4.09b)

Dalla precedente, moltiplicando ambo i membri

per due, ricaviamo: $2+4+6+\ldots = -\dfrac{1}{6}$ (4.09c)

E quindi: $1+3+5+\ldots = 1+2+3+\ldots - (2+4+6\ldots) = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$ (4.10)

In tal modo, abbiamo utilizzato le serie divergenti (4.09b) e (4.09c).

Ora, osserviamo che:

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} k^{-s} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (k+1)^{-s} = \sum_{k\geq 0} (2k+1)^{-s} + \sum_{k\geq 0} (-1)^{2k+1} (2k+2)^{-s} =$$

$$= \zeta(s) - \sum_{k\geq 1} (2k)^{-s} - \sum_{k\geq 1} (2k)^{-s} = (1-2^{1-s})\zeta(s) \qquad (4.11)$$

Ponendo, s = -2m, nella (4.11), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} k^{2m} = (1-2^{1+2m})\zeta(-2m) = 0, \text{ in quanto } \zeta(-2m) = 0 \qquad (4.11a)$$

Ponendo, s=1-2m, nella (4.11), tenendo presente la (4.09),

troviamo: $$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{2m-1} = (1-2^{2m})\zeta(1-2m) = \frac{2^{2m}-1}{2m}B_{2m} \qquad (4.11b)$$

Dalla (4.11) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(2k+1)^{-s} = (1-2^{-s})\zeta(s) = 1^{-s}+3^{-s}+5^{-s}+\dots \qquad (4.12)$$

$$\sum_{k\geq 0}(2k+2)^{-s} = 2^{-s}\zeta(s) = 2^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+\dots \qquad (4.13)$$

Ponendo, s = - 2m,
nelle (4.12) e (4.13), troviamo: $$\sum_{k\geq 0}(2k+1)^{2m} = 0, \qquad \sum_{k\geq 0}(k+1)^{2m} = 0$$

Ponendo, s=1-2m, nelle (4.12) e (4.13),

troviamo: $$\sum_{k\geq 0}(2k+1)^{2m-1} = (2^{2m-1}-1)\frac{B_{2m}}{2m} \qquad (4.12a)$$

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)^{2m-1} = -\frac{B_{2m}}{2m} \qquad (4.13a)$$

I primi membri delle (4.12a) e (4.13a), per m=1,2,…, sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori finiti dei secondi membri delle medesime relazioni.
Ponendo nella (4.11), s = 0, troviamo:

$$1-1+1-1+\dots = (-1)\ \zeta(0) = (-1)(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Ritroviamo così, per altra via, la (2.03)

Ponendo, nella (4.11), s = -1, abbiamo:

$$1-2+3-4+\dots = (1-4)\ \zeta(-1) = (-3)(-\frac{1}{12}) = \frac{1}{4} \qquad (4.14)$$

Ritroviamo, per altra via, la (2.05)

Utilizzando la (4.14) e la (4.09c), ricaviamo:

$$1+3+5+\dots = 1-2+3-4+\dots+(2+4+6+\dots) = \frac{1}{4}+(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$$

Ritroviamo, per altra via, la (4.10)

Ponendo, nella (4.12), s = -1, troviamo: $$1+3+5+\dots = (-1)(-\frac{1}{12})) = \frac{1}{12}$$

Ritroviamo, per una via diversa, la (4.10)

Ponendo, nella (4.13), s = -1, troviamo: $$2+4+6+\dots = 2(-\frac{1}{12}) = -\frac{1}{6}$$

Ritroviamo, per una via diversa, la relazione (4.09c).

Derivando, rispetto ad s, il 1° e l'ultimo membro della (4.11), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{-s}(-\ln k) = (1-2^{1-s})\zeta'(s)+\zeta(s)2^{1-s}\ln 2 \qquad (4.15)$$

Per s = 0, troviamo:

$$\sum_{k\ge 1}(-1)^{k-1}k^0(-\ln k) \;=\; (1-2)\zeta'(0)+\zeta(0)2\ln 2$$

Nell'Analisi Matematica si dimostra che: $\zeta'(0)=-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$,

(vedasi Lindelöf, Testo [5], a pag. 104).

Essendo, inoltre, $\zeta(0)=-\dfrac{1}{2}$, ricaviamo:

$$\sum_{k\ge 1}(-1)^{k-1}(\ln k) = \ln 1-\ln 2+\ln 3-\ln 4+\ldots = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\ln 2 = -\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} \tag{4.16}$$

(vedasi G.H.Hardy, Testo [1], pagg. 346 e 347).

Dalla (4.16) ricaviamo:

$$\ln\left(\frac{2^2}{1^2}\frac{4^2}{3^2}\frac{6^2}{5^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}, \qquad \text{da cui}$$

$$\frac{2^2}{1^2}\frac{4^2}{3^2}\frac{6^2}{5^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2} \tag{4.17}$$

Poiché $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$, dalla (4.17) ricaviamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2 2^n n! 2^n n!}{(2n)!(2n)!(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}[\Gamma(n+1)]^4}{[\Gamma(2n+1)]^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}[\Gamma(n+1)]^4}{\left[\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+1)\right]^2(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[\Gamma(n+1)]^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+\frac{1}{2})\right]^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Nella dimostrazione precedente abbiamo utilizzato le formule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}, \quad \text{e,} \quad \Gamma(2n+1)=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+1)$$

La (4.17), scritta nella forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right) = \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{2},$$

prende il nome di "Prodotto di Wallis" (John **Wallis,** nato a Ashford il 23.11.1616, morto a Oxford il 28.10.1703).

b) Caso di p intero postivo.

Ponendo nella (4.06), k+p = h, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(k+p)^{n-1} = \sum_{h\geq p+1}(h)^{n-1} = \sum_{h\geq 1}h^{n-1} - \sum_{h=1}^{p}h^{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k\geq 0}B_k\binom{n}{k}(-1)^k p^{n-k} \qquad (4.18)$$

Per n=1, dalla (4.18), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(k+p)^0 = \sum_{h\geq 1}h^0 - \sum_{h=1}^{p}h^0 = (1+1+1+\ldots) - p = -\frac{1}{2} - p \qquad (4.19)$$

Per ottenere la (4.19) abbiamo utilizzato la serie divergente (4.09a).

Ponendo, n=1, nell'ultimo membro della (4.18), ricaviamo:

$$-(B_0 p - B_1) = -p - \frac{1}{2}$$, valore identico al risultato della (4.19)

Per n=2, dalla (4.18) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(k+p) = \sum_{h\geq 1}h - \sum_{h=1}^{p}h = (1+2+3+\ldots) - (1+2+3+\ldots+p) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{2}(p^2+p) \qquad (4.20)$$

Ponendo, n=2, nell'ultimo membro della (4.18), ricaviamo:

$$-\left[\frac{p^2}{2}(B_0 - 2B_1 p^{-1} + B_2 p^{-2})\right] = \frac{-1}{2}(p^2+p) - \frac{1}{12},$$

valore identico al risultato della (4.20).

Per ottenere la (4.20) abbiamo utilizzato la (4.09b), che è una serie divergente.

Per n=2m+1, (m=1,2,3…), dalla (4.18) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(k+p)^{2m} = \sum_{h\geq 1}h^{2m} - \sum_{h=1}^{p}h^{2m} = 0 - (1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots + p^{2m}) =$$

$$= \frac{-1}{2m+1}\sum_{k=0}^{m}B_{2k}\binom{2m+1}{2k}p^{2m+1-2k} - \frac{1}{2}p^{2m} \qquad \text{da cui}$$

$$(1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots + p^{2m}) = \frac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{m}B_{2k}\binom{2m+1}{2k}p^{2m+1-2k} + \frac{1}{2}p^{2m} \qquad (4.21)$$

Per p=1, ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{m}B_{2k}\binom{2m+1}{2k} = m + \frac{1}{2} \qquad (4.21a)$$

Per ottenere la (4.21), abbiamo utilizzato la (4.07a), che è una serie divergente.

Per n=2m, dalla (4.18), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(k+p)^{2m-1} = \sum_{h\geq 1}h^{2m-1} - \sum_{h=1}^{p}h^{2m-1} = -\frac{B_{2m}}{2m} - (1^{2m-1} + 2^{2m-1} + 3^{2m-1} + \ldots + p^{2m-1}) =$$

$$=\frac{-1}{2m}\sum_{k=0}^{m} B_{2k}\binom{2m}{2k}p^{2m-2k}-\frac{1}{2}p^{2m-1}, \qquad \text{da cui}$$

$$1^{2m-1}+2^{2m-1}+3^{2m-1}+\ldots+p^{2m-1}=\frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1} B_{2k}\binom{2m}{2k}p^{2m-2k}+\frac{1}{2}p^{2m-1} \qquad (4.22)$$

Per p=1, ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_{2k}\binom{2m}{2k}=m \qquad (4.22a)$$

Per ottenere la (4.22), abbiamo utilizzata la (4.09), che è una serie divergente.

4.01 Consideriamo la serie:

$$e^{-x}-e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots=\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}e^{-kx}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{e^{x}+1}=$$

$$=\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{e^{x}-1}+\frac{1}{e^{x}-1}=\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{2}{e^{2x}-1} \qquad (4.23)$$

Moltiplicando la (4.23) per xe^{-px}, ($p\geq 0$), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}xe^{-(k+p)x}=\frac{xe^{-px}}{e^{x}-1}-\frac{2xe^{-px}}{e^{2x}-1}$$

Tenendo presente la (4.03), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}xe^{-(k+p)x}=\sum_{k\geq 0}B_k\frac{x^{k}e^{-px}}{k!}-\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(2x)^{k}e^{-px}}{k!}=\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(1-2^{k})x^{k}e^{-px}}{k!}; \qquad (4.24)$$

derivando, n volte, rispetto ad x, il 1° ed il 3° membro della (4.24), e ponendo dopo, x=0, troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x)^{(j)}(e^{-(k+p)x})^{(n-j)}=\sum_{k\geq 0}B_k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(1-2^{k})(x^{k})^{(j)}(e^{-px})^{(n-j)}}{k!}$$

Tenendo presente quanto precisato in **4.00**, 7° capoverso, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k+p)^{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k\geq 0}B_k(2^{k}-1)\binom{n}{k}(-1)^{k}p^{n-k} \qquad (4.25)$$

Esamineremo vari casi

a) Caso di p = 0

Ponendo, p=0, nella (4.25), troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{n-1}=\frac{(-1)^{n}}{n}B_n(2^{n}-1) \qquad (4.26)$$

Per n=1, dalla (4.26) abbiamo:

$$1-1+1-1+\ldots=(-1)(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

Ritroviamo, per altra via , la (2.03)

Per n=2, dalla (4.26) abbiamo: $\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)=1-2+3-4+...=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(3)=\frac{1}{4}$

Ritroviamo, per altra via, la (2.05)

Per n = 2m+1, (m = 1,2,3,…), ricordando che $B_{2m+1}=0$, dalla (4.26) abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{2m}=1^{2m}-2^{2m}+3^{2m}-4^{2m}+...=\frac{-1}{2m+1}B_{2m+1}(2^{2m+1}-1)=0, \qquad (4.27)$$

Ritroviamo, così, la (4.11a)

Per m = 0, ritroviamo ancora la (2.03).

Per n=2m, dalla (4.26) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k^{2m-1}=1^{2m-1}-2^{2m-1}+3^{2m-1}-4^{2m-1}+...=\frac{1}{2m}B_{2m}(2^{2m}-1) \qquad (4.28)$$

Ritroviamo, così, la (4.11b)

Per m=1, dalla(4.28) abbiamo: $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k=1-2+3-4+...=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(3)=\frac{1}{4}$

Ritroviamo ancora la (2.05)

b) Caso di p intero positivo

Ponendo, nella (4.25), k+p=h, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k+p)^{n-1}=\sum_{h\geq p+1}(-1)^{h-p-1}h^{n-1}=(-1)^p\left[\sum_{h\geq 1}(-1)^{h-1}h^{n-1}-\sum_{h=1}^{p}(-1)^{h-1}h^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k\geq 0}B_k(2^k-1)\binom{n}{k}(-1)^k p^{n-k} \qquad (4.29)$$

Per n = 2m+1, (m=1,2,3,…), tenendo presente la (4.27), ricaviamo:

$$\sum_{h=1}^{p}(-1)^{h-1}h^{2m}=1^{2m}-2^{2m}+3^{2m}-4^{2m}+...+(-1)^{p-1}p^{2m}=$$

$$=(-1)^{p-1}[\frac{1}{2m+1}\sum_{k\geq 0}B_{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m+1}{2k}p^{2m+1-2k}+\frac{1}{2}p^{2m}] \qquad (4.30)$$

Per p=1, ricaviamo:

$$\sum_{k=1}^{m}B_{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m+1}{2k}=m+\frac{1}{2} \qquad (4.30a)$$

Per m=1, dalla (4.30) ricaviamo:

$$\sum_{h=1}^{p}(-1)^{h-1}h^2=1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{p-1}p^2=(-1)^{p-1}\frac{p}{2}(p+1)$$

Abbiamo ottenuto la (4.30) utilizzando la serie divergente (4.27).

Per n=2m, dalla (4.25) otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k+p)^{2m-1}=\frac{1}{2m}\sum_{k\geq 0}B_k(2^k-1)\binom{2m}{k}(-1)^k p^{2m-k} \qquad (4.30b)$$

Per p=1, ricaviamo:

$$2^{2m-1}-3^{2m-1}+\ldots=(-1+2^{2m-1}-3^{2m-1}+\ldots)+1=-(1-2^{2m-1}+3^{2m-1}-4^{2m-1}\ldots)+1=$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{k\geq 0}B_{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m}{2k}+\frac{1}{2}$$

Tenendo presenta la (4.28), otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{m}B_{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m}{2k}=m-(2^{2m}-1)B_{2m} \qquad (4.30c)$$

Caso di p = $\frac{M}{N}$, (M ed N interi positivi, primi tra loro)

Sostituendo p = $\frac{M}{N}$ nella (4.25) otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(Nk+M)^{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k\geq 0}B_k(2^k-1)\binom{n}{k}(-1)^k(\frac{M}{N})^{n-k}N^{n-1}=$$

$$=\frac{M^n}{nN}\sum_{k\geq 0}B_k(2^k-1)\binom{n}{k}(-1)^k(\frac{N}{M})^k=\frac{M^n}{nN}\sum_{k\geq 0}B_{2k}(2^{2k}-1)\binom{n}{2k}(\frac{N}{M})^{2k}+\frac{1}{2}M^{n-1}, \qquad (4.31)$$

Per n=1, dal 1° membro della (4.31), abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(Nk+M)^0=1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

Per n=1, anche l'ultimo membro della (4.31) fornisce $\frac{1}{2}$

Ritroviamo, così, ancora una volta, la (2.03)

Per n=2, dal 1° membro della (4.31) troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(Nk+M)=N\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}k+M\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}=\frac{1}{4}N+\frac{1}{2}M \qquad (4.32)$$

Dall'ultimo membro della (4.31), per n=2, troviamo:

$$\frac{M^2}{2N}B_2(4-1)\binom{2}{2}(\frac{N}{M})^2+\frac{1}{2}M=\frac{N}{2}\frac{1}{6}(3)+\frac{1}{2}M=\frac{1}{4}N+\frac{1}{2}M \qquad (4.33)$$

Constatiamo che i risultati della (4.32) e della (4.33) sono identici.

Abbiamo ottenuto il risultato della (4.32) **utilizzando le serie divergenti** (2.05) **e** (2.03).

4.02 Ponendo, nella (4.03), x=pz, p> 0,

otteniamo:

$$\frac{pz}{e^{pz}-1}=\sum_{k\geq 0}pze^{-pz(k+1)}=\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(pz)^k}{k!} \qquad (4.34)$$

Moltiplicando gli ultimi due membri

della (4.34), per $e^{z(p-1)}$, abbiamo: $$\sum_{k\ge0} pze^{-z(pk+1)} = \sum_{k\ge0} B_k \frac{(pz)^k e^{z(p-1)}}{k!} \tag{4.35}$$

Derivando, n volte, (n>0), rispetto a z, ambo i membri della (4.35), troviamo:

$$p\sum_{k\ge0}\sum_{h\ge0}^{n}\binom{n}{h}(z)^{(h)}[-(1+pk)]^{n-h}e^{-z(pk+1)} = \sum_{k\ge0} B_k \frac{p^k}{k!}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}(z^k)^{(h)}(p-1)^{n-h}e^{z(p-1)} \tag{4.36}$$

Dalla (4.36), tenendo presente quanto precisato in **4.00**, 7° capoverso, e ponendo, z=0, ricaviamo:

$$\sum_{k\ge0}[1+pk]^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{pn}\sum_{k\ge0} B_k p^k \binom{n}{k}(p-1)^{n-k} \tag{4.37}$$

Ponendo nella (4.37), n= 2m+1, (m=1, 2, …), troviamo:

$$\sum_{k\ge0}[1+pk]^{2m} = \frac{1}{p(2m+1)}\sum_{k\ge0} B_k p^k \binom{2m+1}{k}(p-1)^{2m+1-k} \tag{4.38}$$

Per p=1, abbiamo: $\sum_{k\ge0}(1+k)^{2m} = \sum_{k\ge1}k^{2m} = 0.$

Ritroviamo la (4.07a).

Per p=2, abbiamo: $$\sum_{k\ge0}[1+2k]^{2m} = \frac{1}{2(2m+1)}\sum_{k\ge0} B_k 2^k \binom{2m+1}{k} = 0, \tag{4.39}$$

in quanto, $\zeta(-2m) = 0$

Dalla (4.39), ricaviamo **la notevole formula**: $$\sum_{k\ge0} B_{2k} 2^{2k}\binom{2m+1}{2k} = 2m+1 \tag{4.40}$$

Sommando, membro a membro, la (4.21a) con la (4.30a), otteniamo la (4.40)

Ponendo, nella (4.37), n=2, troviamo:

$$\sum_{k\ge0}[1+pk]^{2-1} = (1+1+1+...)+p(1+2+3+...) = -\frac{1}{2}-p\frac{1}{12}\ ; \tag{4.41}$$

$$\frac{(-1)^{2-1}}{p2}\sum_{k\ge0} B_k p^k\binom{2}{k}(p-1)^{2-k} = \frac{-1}{2p}[B_0(p-1)^2 + B_1 p2(p-1) + B_2 p^2] = -\frac{1}{2}-\frac{p}{12} \tag{4.42}$$

Possiamo constatare che i risultati della (4.41) e (4.42) sono identici.
Per ottenere la (4.41) abbiamo utilizzato la (4.09a) e (4.09b), che sono serie divergenti.
Per n = 2m, dalla (4.37), otteniamo:

$$\sum_{k\ge0}[1+pk]^{2m-1} = \frac{-1}{2pm}\sum_{k\ge0} B_k p^k\binom{2m}{k}(p-1)^{2m-k} \tag{4.43}$$

Per m=1, dalla (4.43) ritroviamo gli
stessi risultati delle (4.41) e (4.42). Per p=1, dalla (4.43) ricaviamo:

$$\sum_{k\ge0}(1+k)^{2m-1} = \sum_{k\ge1}k^{2m-1} = -\frac{B_{2m}}{2m}$$

Ritroviamo la (4.09).

Per p=2, dalla (4.43) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(1+2k)^{2m-1} = \frac{-1}{4m}\sum_{k=0}^{2m} B_k 2^k \binom{2m}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{m} B_{2k} 2^{2k}\binom{2m}{2k} \qquad (4.44)$$

ma, $$\sum_{k\geq 0}(1+2k)^{2m-1} = (1-2^{2m-1})\zeta(1-2m)$$

Ricordando la (4.09), ricaviamo: $$\sum_{k\geq 0}(1+2k)^{2m-1} = \frac{2^{2m-1}-1}{2m}B_{2m} \qquad (4.45)$$

Ritroviamo, così, la (4.12a).
Confrontando la (4.44) con la (4.45),

otteniamo: $$\sum_{k=0}^{m} B_{2k} 2^{2k}\binom{2m}{2k} = 2[m-(2^{2m-1}-1)B_{2m}] \qquad (4.46)$$

Sottraendo, membro a membro, la (4.22a) dalla (4.46), otteniamo la (4.30c)

5.00 Riprendiamo la (4.03) $$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{x^k}{k!} \qquad (5.00)$$

Come abbiamo detto, la serie indicata nel 2° membro della (4.03) risulta divergente per $|x| \geq 2\pi$ - Applicando, alla (4.03), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}dx}{e^x-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{1}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \sum_{k\geq 0} B_k = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} B_{2k} \qquad (5.01)$$

Calcoliamo l'integrale che figura al 1° membro della (5.01). Operando, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}e^{-x}dx}{1-e^{-x}} = \sum_{k\geq 0}\int_0^\infty xe^{-x(k+2)}dx = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Pertanto, dalla (5.01), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1} B_{2k} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \qquad (5.02)$$

Il 1° membro della (5.02) **costituisce, chiaramente, una serie divergente, la quale è rappresentata dal valore del 2° membro della stessa** (5.02).

Osserviamo che i termini della serie $\sum_{k\geq 1} B_{2k}$ sono a segni alternati.

Infatti, dalla nota formula:

$$B_{2n} = (-1)^{n-1}\pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx\,, \qquad (\text{n} = 1,2,3,\ldots) \qquad (5.03)$$

rileviamo che per n pari, B_{2n} presenta un valore negativo, mentre per n dispari, B_{2n} presenta un valore positivo, cioè $B_{4n} < 0$, $B_{4n-2} > 0$,

La formula (5.03) trovasi nel Testo $[4]$, pag. 1076, (formula 9.611-2).

La formula (5.03) è stata verificata nell'Appendice B-punto 3), utilizzando sia il 2° teorema integrale di Cauchy, sia **il metodo del limite e derivata.**

Applicando la (3.04) alla (5.03), otteniamo:

$$\sum_{n\geq 1} B_{2n} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx \; = \; \int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2} \qquad (5.04)$$

Il 1° membro della (5.04) è una serie divergente, rappresentata dal valore finito dell'integrale che figura nell'ultimo membro della (5.04).

Confrontando la (5.04) con la (5.02), ricaviamo: $\int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}$

L'integrale G = $\int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2}$ è certamente convergente.

Infatti, per ogni x, compreso tra zero ed infinito, risulta che shx >x, e quindi:

$$G = \int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2} < \int_0^\infty \frac{dx}{\pi^2+x^2} \; = \; \frac{1}{2}$$

Abbiamo calcolato, nell'Appendice B-punto 2), l'integrale $G = \int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2}$,

utilizzando il teorema dei "Residui", più esattamente il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo trovato lo stesso valore fornito dalla (5.02). Abbiamo avuto cioè:

$$\sum_{n\geq 1} B_{2n} = \int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2} \; = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \qquad (5.05)$$

La (5.05) è una relazione reale e vera, ed è stata ricavata dal confronto di due relazioni, ottenute utilizzando serie divergenti

Il procedimento eseguito nel caso esaminato è da ritenersi, quindi, valido.

5.01 Sostituendo, nella (5.00), -x ad x, troviamo: $\frac{-x}{e^{-x}-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{(-x)^k}{k!}$

Per $|x| \geq 2\pi$, la precedente relazione è divergente, per cui, applicando, alla medesima relazione, l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{-x}{e^{-x}-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}\frac{x}{1-e^{-x}}dx = \sum_{k\geq 0}\int_0^\infty xe^{-x(1+k)}dx = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+k)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k\geq 0} B_k \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx \quad = \sum_{k\geq 0} B_k(-1)^k = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} B_{2k}$$

Uguagliando i risultati delle due ultime relazioni,

troviamo: $\sum_{k\geq 1} B_{2k} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}$

che è identica alla (5.02).

.

5.02 Ponendo nella (4.03), x =iz**,** (i è l'unità immaginaria), ricaviamo:

$$\frac{iz}{e^{iz}-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} B_{2k} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{iz}\,(-\frac{1}{2}) \tag{5.06}$$

$$\frac{iz}{e^{iz}-1} = \frac{iz}{\cos z + i\sin z - 1} = \frac{iz(\cos z - 1 - i\sin z)}{(\cos z-1)^2+(\sin z)^2} = -\frac{iz}{2} + \frac{z\sin z}{2-2\cos z}$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie tra la relazione precedente e la (5.06), otteniamo:

$$\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)} = \sum_{k\geq 0} B_{2k} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k\geq 1} B_{4k}\frac{z^{4k}}{(4k)!} - \sum_{k\geq 1} B_{4k-2}\frac{z^{4k-2}}{(4k-2)!},$$

da cui

$$\sum_{k\geq 1}[B_{4k-2}\frac{z^{4k-2}}{(4k-2)!} + |B_{4k}|\frac{z^{4k}}{(4k)!}] = 1 - \frac{z\cos\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}} \tag{5.07}$$

Le parti immaginarie sono soddisfatte.
Per $|z| \geq 2\pi$, ($z \neq 2k\pi$), la serie del 1° membro della (5.07) non converge, ma costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore finito del 2° membro della stessa relazione.
Pertanto, applicando, alla (5.07), l'integrazione di cui al punto **3.01**, troviamo:

$$\sum_{k\geq 1}|B_{4k}|\frac{1}{(4k)!}\int_0^\infty z^{4z} e^{-z}dz + \sum_{k\geq 1} B_{4k-2}\frac{1}{(4k-2)!}\int_0^\infty z^{4k-2}e^{-z}dz = \int_0^\infty e^{-z}[1-\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)}]dz$$

da cui ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1}|B_{4k}| + \sum_{k\geq 1} B_{4k-2} = \int_0^\infty e^{-z}[1-\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)}]dz \tag{5.08}$$

cioè

$$\sum_{k\geq 1}[|B_{4k}| + B_{4k-2}] = 1 - \sum_{k\geq 1}\frac{2k}{(1+k^2)^2} = 0{,}205766 \tag{5.09}$$

Nell'Appendice B, punto 6), abbiamo dimostrato che

$$\int_0^\infty e^{-z}[1-\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)}]dz = 1 - \sum_{k\geq 1}\frac{2k}{(1+k^2)^2} = 0{,}205766 \tag{5.10}$$

5.03 Osservazioni.
Dalla (5.06) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1} ixe^{-ikx} = \frac{ix}{e^{ix}-1} = \sum_{k\geq 0} B_k\frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - \frac{ix}{2}, \qquad 0<|x|<2\pi, \tag{5.11}$$

Dalla (5.11) otteniamo: $$\sum_{k\geq 1} ix(\cos kx - i\sin kx) = \sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - \frac{ix}{2},$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, troviamo:

$$\sum_{k\geq 1} x\cos kx = -\frac{x}{2}, \qquad \sum_{k\geq 1} x\sin kx) = \sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{5.12}$$

Ponendo nella prima delle relazioni (5.12), $x=\pi$,

troviamo: $\sum_{k\geq 1}\cos k\pi = \sum_{k\geq 1}(-1)^k = -\frac{1}{2}$, da cui rileviamo che:

$$1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}$$

Ritroviamo, ancora una volta, la (2.03**).**

Ponendo, nella seconda relazione delle (5.12), $x=\pi$,

troviamo:
$$\sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} = 0, \tag{5.13}$$

cioè:
$$1+\sum_{k\geq 1} B_{4k}\frac{\pi^{4k}}{(4k)!} - \sum_{k\geq 1} B_{4k-2}\frac{\pi^{4k-2}}{(4k-2)!} = 0,$$

da cui
$$\sum_{k\geq 1}[|B_{4k}|\frac{\pi^{4k}}{(4k)!} + B_{4k-2}\frac{\pi^{4k-2}}{(4k-2)!}] = 1 \tag{5.13a}$$

La serie del 1° membro della (5.13a) costituisce una serie, rappresentata dall'unità.

La (5.13) e la (5,13a) sono state verificate con un programma di matematica.

Dalla (4.23), ricaviamo: $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} ixe^{-ikx} = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} ix(\cos kx - i\sin kx) = \frac{ix}{e^{ix}-1} - \frac{2ix}{e^{2ix}-1} =$

$$= \sum_{k\geq 0} B_k\frac{(ix)^k}{k!} - \sum_{k\geq 0} B_k\frac{(2ix)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - \frac{ix}{2} - \left[\sum_{k\geq 0} B_{2k}\frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} - \frac{2ix}{2}\right] \tag{5.14}$$

Poniamo, nella (5.14), $x=\frac{\pi}{2}$, ed uguagliamo le parti reali e quelle immaginarie.

1) Per le parti immaginarie abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\pi}{2}(\cos k\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ cioè}$$

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\pi}{2}(\cos k\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\left[\sum_{k\geq 0}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} - \sum_{k\geq 0}\cos(2k+2)\frac{\pi}{2}\right] =$$

$=-\frac{\pi}{2}\sum_{k\geq 0}(-1)^{k-1}$, che uguagliata a $\frac{\pi}{4}$, fornisce: $\sum_{k\geq 0}(-1)^{k-1} = -\frac{1}{2}$,

cioè:
$$1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}$$

Ritroviamo, così, ancora la (2.03).

2) Per le parti reali, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\pi}{2}\sin k\frac{\pi}{2} = \sum_{k\geq 0}B_{2k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{\pi}{2})^{2k} - \left[\sum_{k\geq 0}B_{2k}\frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{(2k)!}\right], \text{ cioè:}$$

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\pi}{2}\sin k\frac{\pi}{2} \text{-=} \frac{\pi}{2}\sum_{k\geq 0}(-1)^k \ = \frac{\pi}{2}(1-1+1-1+...) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k\geq 0}B_{2k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{\pi}{2})^{2k} - \left[\sum_{k\geq 0}B_{2k}\frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{(2k)!}\right] = \sum_{k\geq 1}B_{2k}\frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k}(1-2^{-2k})}{(2k)!}, \text{ per cui}$$

$$\sum_{k\geq 1}B_{2k}\frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k-1}(1-2^{-2k})}{(2k)!} = \frac{1}{4} \tag{5.15}$$

Il risultato della (5.15) è reale, e risponde esattamente al risultato del calcolo eseguito con un programma di matematica.

Nello svolgimento dei calcoli abbiamo utilizzato la serie divergente (2.03)**.**

I numeri di Bernoulli sono numeri razionali, e rispondono alla seguente formula ricorrente: $B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$, $B_0 = 1, n > 1$

6.00 Sui numeri di Eulero

Consideriamo la serie:
$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{k\geq 0}E_k\frac{x^k}{k!} \tag{6.01}$$

La serie (6.01) converge per $|x| < \frac{\pi}{2}$, e diverge per $|x| \geq \frac{\pi}{2}$

I numeri E_k sono i ben noti numeri di Eulero

I numeri $E_{2k+1} = 0$; $E_{4k} > 0$; $E_{4k+2} < 0$, (k=0,1,2,…)

I valori dei primi numeri di Eulero sono:

$$E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385$$

Poiché la serie (6.01), per $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, diverge, applicando, alla (6.01), l'integrazione di cui al punto **3.01,** troviamo:
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\cosh x}dx = \sum_{k\geq 0}E_k\frac{1}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \sum_{k\geq 0}E_{2k} \tag{6.02}$$

Sviluppando i calcoli del 1° membro della (6.02), ricaviamo:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\cosh x}dx = \int_0^\infty \frac{2e^{-x}e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx = 2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty e^{-x(2k+2)}dx =$$

$$=2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{(2k+2)} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{(k+1)} = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2$$

Pertanto, per la (6.02), otteniamo: $\sum_{k\geq 0} E_{2k} = \ln 2$ (6.03)

Quindi, chiaramente, il 1° membro della (6.03) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore **(ln2).**

Nel testo [4], a pag. 549, troviamo la formula seguente, (formula 4.271-6):

$$\int_0^\infty (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1+x^2} = (\frac{\pi}{2})^{2n+1} \left|E_{2n}\right| \quad (6.04)$$

Poiché $E_{4k} > 0$, e, $E_{4k+2} < 0$, abbiamo: $E_{2n} = (-1)^n (\frac{2}{\pi})^{2n+1} \int_0^\infty (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1+x^2}$ (6.05)

Applicando, alla (6.05), la (3.04), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0} E_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{4}{\pi^2}(\ln x)^2} \frac{dx}{1+x^2} = (x = e^y) = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi^2+4y^2} \frac{e^y}{1+e^{2y}} dy =$$

$$= \pi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi^2+4y^2} \frac{1}{\cosh y} dy = (y = \pi z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4z^2} \frac{1}{\cosh(\pi z)} dz \quad (6.06)$$

Confrontando la (6.03) con la (6.06),

ricaviamo la formula: $\mathrm{H} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4z^2} \frac{1}{\cosh(\pi z)} dz = \ln 2$ (6.07)

Nell'Appendice B, punto 4.0) abbiamo riportato il calcolo dell'integrale

$\mathrm{H} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4z^2} \frac{1}{\cosh(\pi z)} dz$, ottenuto utilizzando il 2° teorema integrale di Cauchy,

dimostrando che il 1° membro della (6.07) è esattamente uguale a **(ln2).**

La (6.07) è una relazione reale, ricavata dal confronto di due relazioni ottenute utilizzando serie divergenti.

Il procedimento eseguito deve, pertanto, ritenersi valido anche in questo caso.

Nell'Appendice B, punto 4.1) abbiamo verificato la formula (6.05), utilizzando, sia il 2° teorema integrale di Cauchy, **sia il metodo del limite e derivata.**

6.01 Ponendo, nella (6.01), x=iz,

otteniamo: $\frac{2e^{-iz}}{1+e^{-2iz}} = \sum_{k\geq 0} E_k \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} E_{2k} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ (6.08)

L'ultimo membro della (6.08), per $|z| \geq \frac{\pi}{2}$, rappresenta una serie divergente,

e quindi, applicando, alla (6.08), l'integrazione di cui al punto **3.01**, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-x}e^{-ix}}{1+e^{-2ix}} dx = 2\sum_{k\geq 0} (-1)^k \int_0^\infty e^{-x(1+i+2ki)} dx = 2\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{1+i(2k+1)} =$$

$$= 2\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{1+(2k+1)^2} - 2i\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (2k+1)}{1+(2k+1)^2} = \sum_{k\geq 0} E_{2k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^\infty z^{2k} e^{-z} dz = \sum_{k\geq 0} E_{2k} (-1)^k$$

Uguagliando le parti reali della predente relazione, otteniamo:

$$2\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{1+(2k+1)^2}=\sum_{k\ge 0}E_{2k}(-1)^k=\sum_{k\ge 0}E_{4k}-\sum_{k\ge 0}E_{4k+2}=\sum_{k\ge 0}[E_{4k}+|E_{4k+2}|] \qquad (6.09)$$

L'ultimo membro della (6.09) è una serie divergente, rappresentata dal valore della serie convergente del 1° membro.

Utilizzando un programma di matematica, abbiamo ottenuto, per il 1° membro della (6.09), un valore pari a 0,851682.

Quindi: $$\sum_{k\ge 0}[E_{4k}+|E_{4k+2}|]=0{,}851682$$

Ponendo nella (6.08), z = $\frac{\pi}{4}$,

otteniamo: $$\sum_{k\ge 0}E_{2k}\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(2k)!4^{2k}}=\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{2}{2\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2},$$

cioè: $$\sum_{k\ge 0}[E_{4k}\frac{\pi^{4k}}{(4k)!4^{4k}}+|E_{4k+2}|\frac{\pi^{4k+2}}{(4k+2)!4^{4k+2}}]=\sqrt{2} \qquad (6.10)$$

La serie del 1° membro della (6.10) costituisce una serie, rappresentata da $\sqrt{2}$
Abbiamo verificata la (6.10) utilizzando un programma di matematica.

6.02 Riprendiamo la (6.01).

Sviluppando, abbiamo: $$\frac{1}{\cosh x}=2\sum_{k\ge 0}(-1)^k e^{-x(1+2k)}=\sum_{k\ge 0}E_k\frac{x^k}{k!} \qquad (6.11)$$

Derivando, n volte, la (6.11), rispetto ad x, e ponendo dopo, x=0, otteniamo:

$$2\sum_{k\ge 0}(-1)^k(-1)^n(2k+1)^n = E_n \qquad (6.12)$$

Per n= 2m, dalla (6.12) ricaviamo:

$$2\sum_{k\ge 0}(-1)^k(2k+1)^{2m} = E_{2m} \qquad (6.13)$$

Per n=2m-1, (m = 1, 2, 3, …), dalla (6.12) otteniamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k(2k+1)^{2m-1}=0,\ \text{in quanto}\ E_{2m-1}=0 \qquad (6.14)$$

Ponendo, nella (6.12), n=0, troviamo:

$$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

Ritroviamo, ancora una volta, la (2.03)
Ponendo, nella (6.14), m=1, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)=2(0-1+2-3+...)+(1-1+1-1+...)=-2\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=0$$

Abbiamo, così, utilizzato le serie divergenti (2.05) e (2.03).

Moltiplicando i membri della (6.11), per $e^{-px}, p\geq 0$,

abbiamo:
$$2\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-x(1+2k+p)} = \sum_{k\geq 0}E_k\frac{x^k e^{-px}}{k!} \tag{6.15}$$

Derivando, n volte, rispetto a x, i membri della (6.15), tenendo presente quanto indicato in **4.00**, 7° capoverso, e ponendo dopo, x = 0, ricaviamo:

$$2\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-1)^n(2k+1+p)^n = \lim_{x\to 0}\sum_{k\geq 0}\frac{E_k}{k"}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x^k)^{(j)}(e^{-px})^{(n-j)} = \sum_{k\geq 0}E_k\binom{n}{k}(-p)^{n-k}$$

cioè
$$2\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1+p)^n = \sum_{k\geq 0}E_k\binom{n}{k}(-1)^k(p)^{n-k} \tag{6.16}$$

Per p=1, abbiamo:
$$2\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+2)^n = \sum_{k\geq 0}E_k\binom{n}{k}(-1)^k \tag{6.17}$$

Essendo $E_{2n+1}=0$, dalla (6.17) ricaviamo:
$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)^n = 2^{-(n+1)}\sum_{k\geq 0}E_{2k}\binom{n}{2k} \tag{6.18}$$

Per n = 2m, dalla (6.18) abbiamo:
$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k)^{2m} = 1^{2m}-2^{2m}+3^{2m}-4^{2m}+...=2^{-(2m+1)}\sum_{k\geq 0}E_{2k}\binom{2m}{2k} \tag{6.19}$$

Tenendo presente la (4.27), troviamo:
$$\sum_{k\geq 0}E_{2k}\binom{2m}{2k}=0 \tag{6.20}$$

Abbiamo ottenuto la (6.20) utilizzando la (4.27) che è una serie divergente.

Per n=2m-1, dalla (6.18) ricaviamo:
$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k)^{2m-1} = 2^{-2m}\sum_{k\geq 0}E_{2k}\binom{2m-1}{2k} \tag{6.21}$$

Tenendo presente la (4.28), troviamo:
$$\sum_{k\geq 0}E_{2k}\binom{2m-1}{2k} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}B_{2m} \tag{6.22}$$

Abbiamo ottenuto la (6.22) utilizzando la (4.28) che è una serie divergente.

6.03 Relazione tra i numeri di Eulero ed i numeri di Bernoulli
(E_{2n} in funzione di B_k)

E' noto che:
$$\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{2}{e^{4x}-1} \tag{6.23}$$

Moltiplicando ambo i membri della (6.23), per $2xe^x$, otteniamo: $$\frac{2xe^x}{e^{2x}+1}=\frac{2xe^x}{e^{2x}-1}-\frac{4xe^x}{e^{4x}-1} \tag{6.24}$$

Tenendo presente le (6.11) e (4.03), ricaviamo:

$$\frac{2xe^x}{e^{2x}+1}=\sum_{k\geq 0}E_{2k}\frac{x^{2k+1}}{(2k)!}; \qquad \frac{2xe^x}{e^{2x}-1}=\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(2x)^k e^x}{k!}; \qquad \frac{4xe^x}{e^{4x}-1}=\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(4x)^k e^x}{k!}$$

Pertanto: $$\sum_{k\geq 0}E_{2k}\frac{x^{2k+1}}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0}B_k\frac{(2x)^k e^x}{k!} -\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(4x)^k e^x}{k!} \tag{6.25}$$

Derivando, (2n+1) volte, rispetto ad x, la precedente (6.25), e ponendo dopo, x = 0,

ricaviamo: $$(2n+1)E_{2n} = \left(\frac{2xe^x}{e^{2x}-1}\right)^{(2n+1)}_{x=0} -\left[\sum_{k\geq 0}B_k\frac{(4)^k}{k!}\sum_{h=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{h}(x^k)^{(h)}(e^x)^{(2n+1-h)}\right]_{x=0} \tag{6.26}$$

Osserviamo che: $$\frac{2xe^x}{e^{2x}-1}=\sum_{k\geq 0}2xe^{-x-2kx} \tag{6.27}$$

Derivando, (2n+1) volte, rispetto ad x, i due membri della precedente, e ponendo

dopo, x = 0, abbiamo: $\left(\frac{2xe^x}{e^{2x}-1}\right)^{(2n+1)}_{x=0} = -2(2n+1)\sum_{k\geq 0}(1+2k)^{2n}=0$, in quanto $\zeta(-2n)=0$

Quindi, dalla (6.26), tenendo presente quanto

indicato al punto **4.00**, 7° capoverso, otteniamo: $$E_{2n} = \frac{-1}{2n+1}\sum_{k\geq 0}B_k 4^k\binom{2n+1}{k} \tag{6.28}$$

cioè $E_{2n} = 2-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}B_{2k}4^{2k}\binom{2n+1}{2k}$

La (6.28), in alcuni testi, viene indicata

nella seguente forma: $$E_{2n} = \frac{-1}{2n+1}(1+4B)^{2n+1}, \tag{6.29}$$

con l'avvertenza di sostituire, nello sviluppo del 2° membro della (6.29), B^k con B_k

(vedasi Testo [4] , pag. 1079 , formula 9.635-3)

7.00 Sui numeri di Genocchi

(Angelo **Genocchi**, nato a Piacenza il 5 marzo 1817, morto a Torino il 7 marzo 1889)

Consideriamo la serie

$$\frac{2x}{e^x+1}=\sum_{k\geq 0}G_m\frac{x^m}{m!} \tag{7.01}$$

La (7.01) è una serie dove i coefficienti G_m rappresentano i ben noti numeri di Genocchi.

I primi valori di G_m sono dati da:

$G_0=0, G_1=1, G_2=-1, G_4=1, G_6=-3, G_8=17, G_{10}=-155, G_{12}=2073$

Per m = 1, 2, 3,…, $G_{2m+1} = 0$

I numeri di Genocchi G_{2m} sono legati ai numeri di Bernoulli dalla seguente formula:

: $$G_{2m}=2(1-2^{2m})B_{2m} \tag{7.02}$$

per cui: $G_{4m}>0$, $G_{4m-2}<0$, (m=1,2,3,…)

(per la formula (7.02), vedasi Testo $|10|$, a pag. 49)

La (7.02) è facilmente dimostrabile.

Infatti: $$\frac{2x}{e^x+1}=\frac{2x}{e^x-1}-\frac{2(2x)}{e^{2x}-1};$$ sviluppando, otteniamo:

$$\frac{2x}{e^x+1}=x+\sum_{m\geq 1}G_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!};$$

$$\frac{x}{e^x-1}=\left[1-\frac{x}{2}+\sum_{m\geq 1}B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]; \qquad \frac{2x}{e^{2x}-1}=1-x+\sum_{m\geq 1}B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!};$$

quindi: $$x+\sum_{m\geq 1}G_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=2\left[1-\frac{x}{2}+\sum_{m\geq 1}B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]-2[1-x+\sum_{m\geq 1}B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}]$$

cioè, $$\sum_{m\geq 1}G_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=2\left[\sum_{m\geq 1}B_{2m}(1-2^{em})\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di x con lo stesso grado, otteniamo facilmente la (7.02). La serie (7.01) converge per x$<\pi$, e diverge per $x\geq\pi$, e, quindi, applicando, alla (7.01), l'integrazione di cui

al punto **3.01**, troviamo: $$\int_0^\infty\frac{2xe^{-x}}{e^x+1}dx=\sum_{k\geq 0}G_m\frac{1}{m!}\int_0^\infty x^m e^{-x}dx \qquad (7.03)$$

Calcolando l'integrale del 1° membro della (7.03), troviamo:

$$\int_0^\infty\frac{2xe^{-x}}{e^x+1}dx=\int_0^\infty\frac{2xe^{-x}e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty xe^{-x(k+2)}dx = 2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{(k+2)^2}=$$

$$=2-\frac{\pi^2}{6}; \quad \text{cioè:} \qquad \int_0^\infty\frac{2xe^{-x}}{e^x+1}dx=2-\frac{\pi^2}{6} \qquad (7.04)$$

Per il 2° membro della (7.03), troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}G_m = 2-\frac{\pi^2}{6}, \text{ da cui } \qquad \sum_{k\geq 1}G_{2m} = 1-\frac{\pi^2}{6} \qquad (7.05)$$

Il 1° membro della (7.05) definisce una serie divergente, rappresentata dal valore $(1-\frac{\pi^2}{6})$

Ora, dalla (7.02), ricaviamo: $$\sum_{m\geq 1}G_{2m}=2\sum_{m\geq 1}B_{2m}-\sum_{m\geq 1}2^{2m+1}B_{2m} \qquad (7.06)$$

Tenendo presente la (5.03), ed applicando la (3.04), ricaviamo:

$$\sum_{m\geq 1}2^{2m+1}B_{2m}=\sum_{m\geq 1}2^{2m+1}(-1)^{m-1}\pi^{-2m}\int_0^\infty\frac{x^{2m}}{(\sinh x)^2}dx = 2(\frac{2}{\pi})^2\int_0^\infty(\frac{x}{\sinh x})^2\frac{1}{1+(\frac{2x}{\pi})^2}dx=$$

$$= 8\int_0^\infty \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2 \frac{1}{\pi^2+4x^2}\,dx \;=\; \left(x=\frac{y}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{y^2}{(\sinh\frac{y}{2})^2}\frac{1}{\pi^2+y^2}\,dy$$

Nell'Appendice B-punto 5.0) abbiamo calcolato l'Integrale $L = \int_0^\infty \frac{y^2}{(\sinh\frac{y}{2})^2}\frac{1}{\pi^2+y^2}\,dy$

applicando il teorema dei "Residui", più precisamente il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto il seguente risultato:

$$L = \int_0^\infty \frac{y^2}{(\sinh\frac{y}{2})^2}\frac{1}{\pi^2+y^2}\,dy \;=\; \frac{\pi^2}{2}-4 \qquad (7.07)$$

Pertanto, dalla (7.06) abbiamo: $$\sum_{m\ge1} G_{2m} \;=\; 2\sum_{m\ge1} B_{2m} - \left(\frac{\pi^2}{2}-4\right) \qquad (7.08)$$

Tenendo presente la (7.05), dalla (7.08)

ricaviamo: $$2\sum_{m\ge1} B_{2m} = \left(1-\frac{\pi^2}{6}\right) + \left(\frac{\pi^2}{2}-4\right) = \frac{\pi^2}{3}-3,$$

da cui $$\sum_{m\ge1} B_{2m} \;=\; \frac{\pi^2}{6}-\frac{3}{2} \qquad (7.09)$$

che è perfettamente identica alla (5.02).

La relazione (7.04) e l'integrale che figura nella (7.07) li abbiamo ottenuti utilizzando serie divergenti.

Pertanto, è da ritenere valido, anche in questo caso, il procedimento seguito.

7.01 Ponendo, nella (7.01), x = iz, otteniamo: $$\frac{2iz}{e^{iz}+1} = \sum_{m\ge0} G_m \frac{(iz)^m}{m!} \qquad (7.10)$$

cioè: $$2iz\frac{\cos z+1-i\sin z}{(\cos z+1)^2+(\sin z)^2} = iz + \frac{z\sin z}{\cos z+1} \;=\; \sum_{m\ge0} G_{2m}\frac{z^{2m}(-1)^m}{(2m)!} + iz \qquad (7.11)$$

Uguagliando le parti reali della (7.11), ricaviamo:

$$\frac{z\sin z}{\cos z+1} = \sum_{m\ge0} G_{2m}\frac{z^{2m}(-1)^m}{(2m)!} = \sum_{m\ge0} G_{4m}\frac{z^{4m}}{(4m)!} - \sum_{m\ge0} G_{4m+2}\frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!} =$$

$$= \sum_{m\ge0} G_{4m}\frac{z^{4m}}{(4m)!} + \sum_{m\ge0} |G_{4m+2}|\frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!}$$

Per $z=\frac{\pi}{2}$, otteniamo: $$\sum_{m\ge0}\left[G_{4m}\frac{1}{(4m)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m} + |G_{4m+2}|\frac{1}{(4m+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4m+2}\right] = \frac{\pi}{2} \qquad (7.12)$$

La serie del 1° membro della (7.12), costituisce una serie, rappresentata da $\frac{\pi}{2}$.

La (7.10), per $z \ge \pi$, è una serie divergente, per cui, applicando, alla (7.10), l'integrazione di cui al punto **3.01**, ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{2iz}{e^{iz}+1}dz=\sum_{m\geq 0}G_m\frac{(i)^m}{m!}\int_0^\infty z^m e^{-z}dz\text{, da cui:}$$

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{2iz}{e^{iz}+1}dz=2i\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty ze^{-z(1+i+ik)}dz\ =\ 2i\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{1}{(1+ik)^2}=\ 2i\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(1-ik)^2}{(1+k^2)^2}=$$

$$=\ 2i\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}\ +\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{4k}{(1+k^2)^2}$$

$$\sum_{m\geq 0}G_m\frac{(i)^m}{m!}\int_0^\infty z^m e^{-z}dz\ =\sum_{m\geq 0}G_m(i)^m\ =\ \sum_{m\geq 0}G_{2m}(-1)^m\ +\text{i}\ =1+\sum_{m\geq 1}(G_{4m}-G_{4m-2})+\text{i}$$

Uguagliando le parti reali dei risultati delle due precedenti relazioni, otteniamo:

$$1+\sum_{m\geq 1}(G_{4m}-G_{4m-2})\ =\ \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{4k}{(1+k^2)^2}\ ,\qquad\qquad \text{da cui}$$

$$\sum_{m\geq 1}(G_{4m}+|G_{4m-2}|)=\ \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{4k}{(1+k^2)^2}-1\ =\ -0{,}236575 \qquad (7.13)$$

Abbiamo verificato che la parte immaginaria dell'integrale $\int_0^\infty e^{-z}\frac{2iz}{e^{iz}+1}dz$ è uguale ad i,

mentre la parte reale dello stesso integrale è uguale a (1 – 0,236575).

Il 1° membro della (7.13) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore -0,236575.

7.02 Sostituendo, nella (7.01), -x ad x, abbiamo: $\frac{-2x}{e^{-x}+1}=\sum_{k\geq 0}G_m\frac{(-x)^m}{m!}$ **(7.**14)

La (7.14), per $x\geq\pi$, è una serie divergente, per cui, applicando, alla (7.14), l'integrazione di cui al punto **3.01**, troviamo:

:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{-2x}{e^{-x}+1}dx=\sum_{m\geq 0}G_m\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^\infty x^m e^{-x}dx\text{, da cui}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{-2x}{e^{-x}+1}dx=-2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_9^\infty xe^{-x(1+k)}dx\ =\ -2\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{1}{(1+k)^2}\ =\ -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{m\geq 0}G_m\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^\infty x^m e^{-x}dx\ =\ \sum_{m\geq 0}G_m(-1)^m\ =\ -1+\sum_{m\geq 1}G_{2m}$$

Uguagliando i risultati delle due precedenti relazioni, troviamo:

$$\sum_{m\geq 1}G_{2m}=1-\frac{\pi^2}{6} \qquad (7.15)$$

Ritroviamo, così, la (7.05).

7.03 Sostituendo nella (7.01), x = py, con p>0,

otteniamo: $$\frac{2py}{e^{py}+1}=\sum_{k\geq 0}G_k\frac{(py)^k}{k!} \qquad (7.16)$$

Operando sui due membri della (7.16), abbiamo:

$$2py\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-py(1+k)} = \sum_{k\geq 0} G_k \frac{p^k y^k}{k!} \qquad (7.17)$$

Moltiplicando, per $e^{y(p-1)}$, ambo i membri della (7.17), troviamo:

$$2p\sum_{k\geq 0}(-1)^k ye^{-y(1+pk)} = \sum_{k\geq 0} G_k \frac{p^k y^k e^{y(p-1)}}{k!} \qquad (7.18)$$

Derivando, n volte, rispetto ad y, i due membri della (7.18), ricaviamo:

$$2p\sum_{k\geq 0}(-1)^k \sum_{j\geq 0}\binom{n}{j} y^{(j)}[e^{-y(1+pk)}]^{(n-j)} = \sum_{k\geq 0} G_k \frac{p^k}{k!}\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}(y^k)^{(j)}[e^{y(p-1)}]^{(n-j)} \qquad (7.19)$$

Ponendo, nella (7.19), y=0, e tenendo presente quanto precisato nel punto **4.00**, 7° capoverso, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (1+pk)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2pn}\sum_{k\geq 0} G_k p^k \binom{n}{k}(p-1)^{n-k} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(p-1)^{n-1}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2pn}\sum_{k\geq 1} G_{2k} p^{2k}\binom{n}{2k}(p-1)^{n-2k} \qquad (7.20)$$

Esamineremo vari casi:

a) Caso di n=2m (m=1, 2, 3, …)

Ponendo, nella (7.20), n=2m, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (1+pk)^{2m-1} = -\frac{(p-1)^{2m-1}}{2} - \frac{1}{4pm}\sum_{k\geq 1} G_{2k} p^{2k}\binom{2m}{2k}(p-1)^{2m-2k} \qquad (7.21)$$

Ponendo, nella (7.21), p=1, troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (1+k)^{2m-1} = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1} k^{2m-1} = -\frac{1}{4m}G_{2m} = \frac{1}{2m}(2^{2m}-1)B_{2m} \qquad (7.22)$$

Ritroviamo, così, la (4.11b)

Dalla (7.21), per p=2, ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k (1+2k)^{2m-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8m}\sum_{k\geq 1} G_{2k} 2^{2k}\binom{2m}{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4m}\sum_{k\geq 1} B_{2k} 2^{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m}{2k} \qquad (7.23)$$

Poichè il 1° membro della (7.23) è uguale a zero, come risulta dalla (6.14), dalla medesima (7.23), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 1} G_{2k} 2^{2k}\binom{2m}{2k} = -4m \qquad (7.24)$$

La precedente relazione (7.24) consente di calcolare i numeri di Genocchi.

Nell'ultimo passaggio della (7.23) abbiamo utilizzato la (7.02).

Per m=1, dalla (7.23), ricaviamo:

$$1-3+5-7+\ldots = -\frac{1}{2} + \frac{4}{4}\frac{1}{6}(3) = 0 \qquad (7.24a)$$

b) Caso di n=2m+1

Ponendo, nella (7.20), n = 2m+1, abbiamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k(1+pk)^{2m} = \frac{(p-1)^{2m}}{2}+\frac{1}{2p(2m+1)}\sum_{k\ge 1}G_{2k}\,p^{2k}\binom{2m+1}{2k}(p-1)^{2m+1-2k} \qquad (7.25)$$

Ponendo, nella (7.25), p=1, abbiamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k(1+k)^{2m} = \sum_{k\ge 1}(-1)^{k-1}k^{2m} = 0 \qquad (7.26)$$

Ritroviamo, così, la (4.11a)

Per p=2, dalla (7.25) ricaviamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k(1+2k)^{2m} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4(2m+1)}\sum_{k\ge 1}G_{2k}\,2^{2k}\binom{2m+1}{2k}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2m+1)}\sum_{k\ge 1}B_{2k}\,2^{2k}(2^{2k}-1)\binom{2m+1}{2k} \qquad (7.27)$$

Poiché il 1° membro della (7.27) è uguale a $\frac{1}{2}E_{2m}$, come risulta dalla (6.13), dalla medesima (7.27) ricaviamo:

$$\sum_{k\ge 1}G_{2k}\,2^{2k}\binom{2m+1}{2k} = 2(2m+1)(E_{2m}-1) \qquad (7.27.a)$$

La (7.27a) collega i numeri di Eulero con i numeri di Genocchi.
Nell'ultimo passaggio della (7.27) abbiamo utilizzato la (7.02).

7.04 Consideriamo l'espressione seguente:

$$\frac{x}{e^x-1}\frac{2x}{e^x+1} = x\frac{2x}{e^{2x}-1} \qquad (7.28)$$

Ricordando la (4.03) e la (7.01), abbiamo:

$$\left(\sum_{k\ge 0}B_k\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{m\ge 0}G_m\frac{x^m}{m!}\right) = \sum_{h\ge 0}B_h\frac{2^h x^{h+1}}{h!} \qquad (7.29)$$

Derivando, n+1 volte, rispetto a x, i due membri della (7.29), e ponendo dopo, x=0, troviamo: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_kG_{n+1-k} = B_n 2^n(n+1)$, n>0. (7.30)

Per n= 2m, (m=1, 2,…), $\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}B_kG_{2m+1-k} = B_{2m}2^{2m}(2m+1)$ (7.31)

da cui $(2m+1)B_1G_{2m}+\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}B_{2k}G_{2m+1-2k} = B_{2m}2^{2m}(2m+1)$ (7.32)

Poiché $G_{2m+1}=0$, la precedente relazione (7.32), si riduce a:

$$(2m+1)B_1G_{2m} + (2m+1)B_{2m}G_1 = B_{2m}2^{2m}(2m+1)$$

da cui $-\frac{1}{2}G_{2m}+B_{2m} = B_{2m}2^{2m}$

cioè: $G_{2m} = 2(1-2^{2m})B_{2m}$

Ritroviamo, così, la (7.02)

Osserviamo che la precedente relazione è valida anche per m=0

Per $n=2m-1$, dalla (7.30) ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}B_k G_{2m-k} = B_{2m-1}2^{2m-1}(2m) \tag{7.33}$$

Per m>1, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}B_{2k}G_{2m-2k} = 0 \tag{7.34}$$

La (7.34) rappresenta un'altra relazione che lega i numeri di Genocchi ai numeri di Bernoulli

8.00 Sui numeri di Catalan

(Eugène Charles **Catalan**, nato a Bruges, Belgio, nel 1814, morto a Liegi nel 1894)

Consideriamo la serie $$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k}x^k \tag{8.01}$$

La serie (8.01) è una serie convergente per $|x| < \frac{1}{4}$, ed è divergente per $|x| \geq \frac{1}{4}$.

I valori assoluti dei coefficienti delle potenze della serie (8.01) rappresentano i ben noti numeri di Catalan, di cui i primi valori, per k=0,1,2,3,…,

sono dati da: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, …

Dalla (8.01), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k}x^k = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}x^k =$$

$$=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}x^k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\sum_{k\geq 0}\frac{(-4)^k\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+2)}x^k =$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}(-4)^k x^k\int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt \tag{8.02}$$

Applicando la (3.04) alla (8.02), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k}x^k = \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}\frac{1}{1+4xt}dt = (t=\frac{y}{1+y}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{1+y}\frac{dy}{1+y+4xy} =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1+4x}{1+y+4xy}\right)\frac{dy}{-4x} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{-4x}\pi(\sin\frac{\pi}{2})^{-1} + \frac{2}{\pi}\frac{1+4x}{-4x}\int_0^\infty\frac{y^{\frac{1}{2}-1}dy}{1+y(1+4x)} =$$

$$=\frac{1}{-2x}+\frac{2}{\pi}\frac{1+4x}{4x}\frac{1}{\sqrt{1+4x}}\pi(\sin\frac{\pi}{2})^{-1} = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}, \qquad \text{cioè:}$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k}x^k = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x} \tag{8.03}$$

Ricordiamo che: $$\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{1+y}dy = \pi(\sin\frac{\pi}{2})^{-1}$$

Pertanto, la serie (8.01), per 4x ≥ 1, è una serie divergente, rappresentata da $\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}$

Per i numeri di Catalan , è valida la relazione ricorrente $C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}, \quad n \geq 2$

La relazione $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ è dovuta al matematico Segner.

I numeri di Catalan risolvono molti problemi di matematica discreta.

Dalla (8.03), per x=1, abbiamo: $$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (8.03a)$$

Il 1° membro della (8.03a) costituisce una serie divergente, rappresentata da: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Il valore $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ rappresenta la sezione aurea di un segmento di lunghezza unitaria.

Moltiplicando, per x, ambo i membri della (8.03), e derivando rispetto ad x, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{2k}{k}x^k = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \qquad (8.04)$$

Ora, il 1° membro della (8.04), per 4x ≥ 1, costituisce una serie divergente, per cui., applicando, alla (8.04), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{2k}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}} = -\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{4}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-2\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3}] \text{, cioè}$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{2k}{k}k! = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(2k)!}{k!} = -\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{4}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-2\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3}] \qquad (8.05)$$

Il 1° membro della (8.05) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore dell'ultimo membro della (8.05), che è uguale a: 0,545641.

Il calcolo dell'integrale $M = \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$ l'abbiamo riportato nell'Appendice B, punto 5.1).

9.00 Sui numeri di Stirling di seconda specie.

(James **Stirling**, scozzese, nato a Garden (Stirlingshire) nel 1692,
morto a Edimburgo il 5 dicembre 1770)

Il numero di Stirling di seconda specie, S(n.k), rappresenta il numero di raggruppamenti di n oggetti distinti in esattamente k gruppi (vedasi Testo [11] a pag. 79).

Essi derivano dalla serie: $$\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} \qquad (9.01)$$

Derivando, n volte, rispetto a x, e ponendo

dopo, x=0, troviamo: $$S(n,k) = \left[\frac{(e^x-1)^k}{k!}\right]^{(n)}_{x=0}$$

dove con S(n,k) vengono indicati i numeri di Stirling di seconda specie.

Per ogni k intero non negativo, n ≥ k, detti numeri sono tutti numeri interi positivi.

I primi numeri S(n.k) sono forniti dalla tabella seguente, che costituisce il Triangolo di Stirling di seconda specie:

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1

9.01 Sostituendo, nella (9.01), -x ad x,

abbiamo: $$\frac{(e^{-x}-1)^k}{k!} = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{(-x)^n}{n!} \qquad (9.02)$$

Per x>1, la serie al 2° membro della (9.02) è divergente, per cui, applicando, alla (9.02), l'integrazione di cui

al punto **3.01**, otteniamo: $$\int_0^\infty e^{-x}\frac{(e^{-x}-1)^k}{k!}dx = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx \qquad (9.03)$$

Operando sui due membri della (9.03), ricaviamo: $$\int_0^\infty e^{-x}\frac{(e^{-x}-1)^k}{k!}dx = -\int_0^\infty \frac{(e^{-x}-1)^k}{k!}de^{-x} =$$

$$=(e^{-x}=y) = -\int_1^0 \frac{(y-1)^k}{k!}dy = -\frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$$

$$\sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \sum_{n\geq k} S(n,k)(-1)^n$$

Uguagliando i risultati delle due ultime

relazioni, ricaviamo: $$\sum_{n\geq k} S(n,k)(-1)^n = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \qquad (9.04)$$

Per k=1, troviamo: $\sum_{n\geq 1} S(n,1)(-1)^n = -\frac{1}{2}$

Poiché S(n,1) = 1 per qualsiasi n intero positivo, dalla precedente

relazione, **ancora una volta, otteniamo la** (2.03), cioè: $1-1+1-1+... = \frac{1}{2}$

La serie indicata al 1° membro della (9.04), per ogni valore di k intero positivo, costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore del 2° membro della medesima (9.04), che dipende solamente da k. Osserviamo che S(n,0)=0, S(0,0)=1.

9.02 Ponendo, nella (9.01), x=iz,

otteniamo: $$\frac{(e^{iz}-1)^k}{k!}=\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{(iz)^n}{n!} \qquad (9.05)$$

La serie del 2° membro della (9.05), per z>1, è divergente, e quindi, applicando, alla (9.05), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{(e^{iz}-1)^k}{k!}dz=\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{(i)^n}{n!}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz$$

Operando sui due membri della precedente relazione, ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{(e^{iz}-1)^k}{k!}dz=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{k}{j}(-1)^j\int_0^\infty e^{-z+izj}dz=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{1-ij}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{1+j^2}+i\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{k}{j}\frac{j(-1)^j}{1+j^2};$$

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)(i)^n = \sum_{n\geq k}S(2n,k)(-1)^n - i\sum_{n\geq k}S(2n-1,k)(-1)^n$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie delle due precedenti relazioni, abbiamo:

$$\sum_{n\geq k}S(2n,k)(-1)^n = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{1+j^2} \qquad (9.06)$$

$$\sum_{n\geq k}S(2n-1,k)(-1)^n = -\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{k}{j}\frac{j(-1)^j}{1+j^2} \qquad (9.07)$$

I primi membri delle (9.06) e (9.07) costituiscono, per ogni k intero positivo, serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dal valore finito dei secondi membri delle predette (9.06) e (9.07).

Per k=1, essendo S(2n,1) = 1, e S(2n-1,1) = 1,

dalle (9.06) e (9.07) ricaviamo: $$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

Ritroviamo, così, ancora una volta, la (2.03).

10.00 Sui numeri di Stirling di prima specie.

Il numero di Stirling di prima specie, o numero dei cicli di Stirling, s(n,k), rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti che hanno esattamente k cicli (vedasi Testo [11] a pag. 80).

Essi derivano dalla serie: $$\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}=\sum_{n\geq k}s(n,k)\frac{x^n}{n!} \qquad (10.01)$$

dove con s(n,k) vengono indicati i numeri di Stirling
di prima specie. Derivando, n volte, rispetto ad x, ambo i membri

della (10.01), e ponendo dopo, x=0, abbiamo: s(n,k) = $\dfrac{\left[\ln^k(1+x)\right]^{(n)}_{x=0}}{k!}$

Per k=1, troviamo: s(n,1) = $\left[(1+x)^{-1}\right]^{(n-1)}_{x=0} = \dfrac{\Gamma(n)(-1)^{n-1}}{\Gamma(1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!$ (10.02)

I primi numeri de Stirling di prima specie sono forniti dalla tabella seguente, che rappresenta
Il Triangolo di Stirling di prima specie:

1				
-1	1			
2	-3	1		
-6	11	-6	1	
24	-50	35	-10	1

Per ogni k intero positivo, i valori di s(n,k), n ≥ k, sono numeri interi a segni alterni.
Per x>1, la serie al 2° membro della (10.01) risulta divergente, per cui, applicando,
alla (10.01), l'integrazione di cui

al punto **3.01**, abbiamo: $\int_0^\infty e^{-x}\dfrac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx = \sum_{n\ge k} s(n,k)\dfrac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$,

da cui ricaviamo: $\sum_{n\ge k} s(n,k) = \int_0^\infty e^{-x}\dfrac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx$ (10.03)

Ponendo , nell'integrale indicato nel 2° membro della (10.03), 1+x = e^y, otteniamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx = \frac{1}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(e^y-1)}e^y dy = \frac{e}{k!}\sum_{h\ge 0}(-1)^h\frac{1}{h!}\int_0^\infty y^k e^{yh+2y}e^{-y}dy =$$

$$= \frac{e}{k!}\sum_{h\ge 0}(-1)^h\frac{1}{h!}\sum_{v\ge 0}\frac{(h+2)^v}{v!}\int_0^\infty y^k y^v e^{-y}dy == \frac{e}{k!}\sum_{h\ge 0}(-1)^h\frac{1}{h!}\sum_{v\ge 0}\frac{(h+2)^v}{v!}(k+v)! =$$

$$= e\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v\binom{k+v}{k}, \text{ cioè:}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx = e\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v\binom{k+v}{k}; \text{ pertanto:}$$

$$\sum_{n\ge k} s(n,k) = e\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v\binom{k+v}{k} \qquad (10.04)$$

La serie indicata al 1° membro della (10.04) costituisce, per ogni k intero positivo,
una serie divergente, rappresentata dal valore finito del 2° membro.

L'integrale $\int_0^\infty e^{-x}\dfrac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx$ lo possiamo calcolare anche nel modo seguente:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!}dx = \frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon^{(k)}\int_0^\infty (1+x)^\varepsilon e^{-x}dx = (1+x=y) =$$

$$= \frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon^{(k)}\int_1^\infty (y)^\varepsilon e^{-(y-1)}dy = \frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon^{(k)}[\int_0^\infty (y)^\varepsilon e^{-(y-1)}dy - \int_0^1 y^\varepsilon e^{-y+1}dy] =$$

$$= \frac{e}{k!}\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon^{(k)}[\Gamma(\varepsilon+1) - \sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\frac{1}{\varepsilon+h+1}] = \frac{e}{k!}[\Gamma^{(k)}(1) - \sum_{h\ge 0}\frac{k!}{h!}\frac{(-1)^{h+k}}{(h+1)^{k+1}}]$$

Quindi: $$\sum_{n\ge k} s(n,k) = \frac{e}{k!}[\Gamma^{(k)}(1)] + (-1)^k e\sum_{h\ge 1}\frac{1}{h!}\frac{(-1)^h}{h^k} \qquad (10.05)$$

Il 2° membro della (10.05) rappresenta una formula che ci indica, in modo più evidente, che essa fornisce, per ogni k intero positivo, un valore finito.

Per k=1, dalla (10.05) ricaviamo:

$$\sum_{n\ge 1} s(n,1) = e[\Gamma'(1) - \sum_{h\ge 1}\frac{(-1)^h}{h!h}] = -e[\gamma + \sum_{h\ge 1}\frac{(-1)^h}{h!h}]$$

Tenendo presente la (3.08), rileviamo che: $$\sum_{n\ge 1} s(n,1) = \sum_{k\ge 0}(-1)^k k!$$

Confrontando la (10.04) con la (10.05), otteniamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = k![\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v\binom{k+v}{k} - \sum_{h\ge 1}\frac{1}{h!}\frac{(-1)^{h+k}}{h^k}] \qquad (10.06)$$

Nell'Appendice B, punto 7.0), abbiamo indicato un modo per calcolare il valore di $\Gamma^{(k)}(1)$, utilizzando la formula seguente:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \lim_{\varepsilon\to 0}[\Gamma(1+\varepsilon)\Psi(1+\varepsilon)]^{(k-1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\Gamma^{(j)}(1+\varepsilon)\Psi^{(k-1-j)}(1+\varepsilon),$$

dove $\Gamma'(1+\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)\Psi(1+\varepsilon)$, e, $\Psi(1+\varepsilon) = \int_0^1 \frac{t^\varepsilon - 1}{t-1}dt - \gamma$

Dalla (10.02), otteniamo:

$$\sum_{n\ge 1} s(n,1) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n n! = \int_0^\infty e^{-x}\ln(1+x)dx = -e\,(\gamma + \sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^k}{k!k}) = 0{,}596347 \qquad (10.07)$$

La serie indicata al 1° membro della (10.07) costituisce una serie divergente, rappresentata dall'integrale che figura nel 3° membro della (10.07), il cui valore è 0,596347, come si rileva dalla (3.08).

Per k=0, dalla (10.06)

abbiamo: $$\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v = \sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\sum_{v\ge 0}(h+2)^v\frac{1}{v!}\int_0^\infty t^v e^{-t}dt =$$

$$= \sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\int_0^\infty e^{-t}e^{t(h+2)}dt = \int_0^\infty e^t e^{-e^t}dt = e^{-1};$$

$$\sum_{h\geq 0}\frac{1}{h!}\frac{(-1)^h}{(h+1)}=\sum_{h\geq 1}\frac{(-1)^{h-1}}{h!}= \quad -(e^{-1}-1)$$

Sommando i risultati della ultime due relazioni, otteniamo il risultato finale che è uguale ad 1, come era da aspettarsi.

10.01 **Ponendo**, nella (10.01), k=1, x = iz,

otteniamo: $\ln(1+iz)=\sum_{n\geq 1}s(n,1)\frac{(iz)^n}{n!}$, cioè

$$\frac{1}{2}\ln(1+z^2)+i\arctan z \; = \; \sum_{n\geq 1}s(2n,1)(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-i\sum_{n\geq 1}s(2n-1,1)(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie della precedente relazione , ricaviamo:

$$\sum_{n\geq 1}s(2n,1)(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \; = \; \frac{1}{2}\ln(1+z^2) \qquad (10.08)$$

$$\sum_{n\geq 1}s(2n-1,1)(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \; = \; \arctan z \qquad (10.09)$$

Per z>1, le serie indicate al 1° membro delle (10.08) e (10.09) sono serie divergenti, per cui, applicando, alle predette relazioni, l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\sum_{n\geq 1}s(2n,1)(-1)^n \; = \; \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z}\ln(1+z^2)dz \qquad (10.10)$$

$$\sum_{n\geq 1}s(2n-1,1)(-1)^{n-1}=\int_0^\infty e^{-z}\arctan z dz \qquad (10.11)$$

Sviluppando i calcoli degli integrali delle due relazioni precedenti, abbiamo;

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z}\ln(1+z^2)dz=\int_0^\infty\frac{ze^{-z}}{1+z^2}dz \; = \; \sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)! \; = 0{,}343378$$

$$\int_0^\infty e^{-z}\arctan z dz \; = \; \int_0^\infty\frac{e^{-z}}{1+z^2}dz \; = \; \sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k)! = 0{,}62145$$

Dalle relazioni precedenti si evince, chiaramente, che le serie indicate nei primi membri delle (10.10) e (10.11) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dagli integrali indicati nei secondi membri delle medesime relazioni, i cui valori numerici sono, rispettivamente, 0,343378 e 0,62145.

11.00 **Sui numeri di Bell** (Eric Temple **Bell**, nato a Peterhead, Aberdeen, Scozia, il 07.02.1883, morto a Watsonville, California, il 21.12.1960).

Il numero di Bell rappresenta il numero totale dei modi di disporre n oggetti in gruppi (vedasi Testo [11] a pag. 80).

I numeri di Bell derivano dalla serie $$e^{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \qquad 11.01)$$

dove i numeri b_n indicano i numeri di Bell. I primi valori dei numeri di Bell, per n=1,2,3,…, sono dati da: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, …

I numeri b_n sono tutti interi positivi, e definiti dalle relazioni seguenti:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k ; \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k), \qquad b_0 = 1 \qquad (11.02)$$

(vedasi Testo [10], a pag. 210).

Dalla (11.01), ricaviamo: $$e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, i due membri della relazione precedente, e ponendo dopo, x=0, otteniamo: $$b_n = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}$$ (formula di Dobinski)

Alcuni testi indicano i numeri di Bell con la lettera B. Altri testi li indicano con la lettera b. Noi abbiamo preferito indicarli con la lettera b per distinguerli dai numeri di Bernoulli che, generalmente, vengono indicati con la lettera B.

11.01 Sostituendo nella serie (11.01), -x ad x,

troviamo la relazione: $$e^{e^{-x}-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n \frac{x^n}{n!} \qquad (11.03)$$

La serie (11.01) converge per $|x|<1$, e diverge per $|x|\geq 1$, per cui, applicando, alla (11.01), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo: $$\int_0^{\infty} e^{e^{-x}-1}e^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx \qquad (11.04)$$

Dal 1° membro della (11.04), ricaviamo: $\int_0^{\infty} e^{e^{-x}-1}e^{-x}dx = -e^{-1}\int_0^{\infty} e^{e^{-x}}de^{-x} = (e^{-x}=\text{y}) = -e^{-1}\int_1^{0} e^{y}dy = 1-e^{-1}$

Dal 2° membro della (11.04), otteniamo $\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ **;**

quindi**:** $$\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n = 1-e^{-1} \qquad (11.05)$$

La serie indicata al 1° membro della (11.05) è, chiaramente, una serie divergente, ma è rappresentata dal valore $1-e^{-1}$

Dal 1° membro della (11.05), ricaviamo: $$\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n = 1+\sum_{n\geq 1}(b_{2n}-b_{2n-1})$$

da cui $$\sum_{n\geq 1}(b_{2n}-b_{2n-1}) = -e^{-1} \qquad (11.06)$$

Il 1° membro della (11.06), costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore $(-e^{-1})$.

11.02 Ponendo, nella (11.01),

x = iz, troviamo: $$e^{-1}e^{e^{iz}} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{e^{ikz}}{k!} = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{(iz)^n}{n!} \qquad (11.07)$$

La serie indicata nell'ultimo membro della (11.07), per z>1, è divergente, per cui, applicando, alla (11.07), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-z}e^{ikz}dz = \sum_{n\geq 0} b_n \int_0^\infty e^{-z}\frac{(iz)^n}{n!}dz \text{ , da cui}$$

$$e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-z}e^{ikz}dz = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{1-ik} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1+ik}{1+k^2} =$$

$$= e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{1+k^2} + ie^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{k}{1+k^2} \;; \qquad (11.08)$$

$$\sum_{n\geq 0} b_n \int_0^\infty e^{-z}\frac{(iz)^n}{n!}dz = \sum_{n\geq 0} b_n (i)^n = \sum_{n\geq 0} b_{2n}(-1)^n - i\sum_{n\geq 1} b_{2n-1}(-1)^n \qquad (11.09)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie degli ultimi membri delle relazioni (11.08) e (11.09), otteniamo:

$$\sum_{n\geq 0} b_{2n}(-1)^n = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{1+k^2} \qquad (11.10)$$

$$\sum_{n\geq 1} b_{2n-1}(-1)^n = -e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{k}{1+k^2} \;; \qquad (11.11)$$

cioè: $$\sum_{n\geq 0} b_{2n}(-1)^n = \sum_{n\geq 0} b_{4n} - \sum_{n\geq 0} b_{4n+2} = 1 + \sum_{n\geq 1} b_{4n} - \sum_{n\geq 1} b_{4n-2} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{1+k^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} b_{2n-1}(-1)^n = -1 + \sum_{n\geq 1} b_{4n-1} - \sum_{n\geq 1} b_{4n+1} = -e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{k}{1+k^2} \text{ ,}$$

da cui: $$\sum_{n\geq 1} b_{4n} - \sum_{n\geq 1} b_{4n-2} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{1}{1+k^2} - 1 = -0{,}40427$$

$$\sum_{n\geq 1} b_{4n+1} - \sum_{n\geq 1} b_{4n-1} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\frac{k}{1+k^2} - 1 = -0{,}7198;$$

cioè: $$b_4 - b_2 + b_8 - b_6 + \ldots = -0{,}40427 \qquad (11.12)$$

$$b_5 - b_3 + b_9 - b_7 + \ldots = -0{,}7198 \qquad (11.13)$$

Pertanto i primi membri delle (11.12) e (11.13) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori $-0{,}40427$ e $-0{,}7198$.

12.00 Sui numeri complementari di Bell

I numeri complentari di Bell derivano

dalla serie $$e^{1-e^x} = \sum_{n\geq 0}\bar{b}_n \frac{x^n}{n!} \qquad (12.01)$$

dove $\overline{b_n}$ rappresentano i numeri complementari di Bell.

La (12.01) è una serie a segni alterni, ma non regolari. I primi valori dei numeri complementari di Bell sono dati da:

$$\overline{b_0} = 1, \overline{b_1} = -1, \overline{b_2} = \frac{1}{3}, \overline{b_3} = \frac{1}{4}, \overline{b_4} = -\frac{2}{5}, \overline{b_5} = -\frac{3}{2}$$

Dalla (12.01) ricaviamo: $$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n\geq 0}\bar{b}_n \frac{x^n}{n!}$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, la precedente relazione, e ponendo dopo, x=0,

otteniamo la seguente relazione: $$\overline{b_n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S(n,k) \qquad (12.02)$$

Per x>1, la serie al secondo membro della (12.01) costituisce una serie divergente, e quindi, applicando, alla (12.01), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{1-e^x}dx = (e^x = 1+y) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^2}e^{-y}dy = -\int_0^\infty e^{-y}d\frac{1}{1+y} = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{1+y}dy$$

Ricordando la (3.07), troviamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{1-e^x}dx = 1 + e\left[\gamma + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\right] \qquad (12.03)$$

$$\sum_{n\geq 0}\overline{b_n}\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}\overline{b_n} \qquad (12.04)$$

Pertanto: $$\sum_{n\geq 1}\overline{b_n} = e\left[\gamma + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\right] = -0{,}596347 \qquad (12.05)$$

La serie del 1° membro della (12.05) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore del 2° membro della (12.05), che è uguale a $-0{,}596347$.

Dalla (12.01) ricaviamo: $$e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}e^{kx} = \sum_{n\geq 0}\bar{b}_n\frac{x^n}{n!} \qquad (12.06)$$

Derivando, n volte, rispetto a x, ambo i membri

della (12.06), e ponendo dopo, x=0, troviamo: $$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k k^n}{k!} = e^{-1}\overline{b_n} \qquad (12.07)$$

12.01 Sostituendo nella (12.01), -x ad x, troviamo: $$e^{-(e^{-x}-1)} = \sum_{n\geq 0}\bar{b}_n\frac{(-x)^n}{n!} \qquad (1208)$$

Per x>1, la serie del 2° membro della (12.08) costituisce una serie divergente , per cui, applicando, alla (12.08), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-(e^{-x}-1)}dx = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_n \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx \tag{12.09}$$

Calcolando gli integrali dei due membri della (12.09), troviamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{-(e^{-x}-1)}dx = -\int_0^\infty ee^{-e^{-x}}de^{-x} = (e^{-x}=y) = -e\int_1^0 e^{-y}dy = e-1$$

$$\sum_{n\ge 0}\overline{b}_n \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_n(-1)^n$$

Sostituendo il risultato delle due precedenti relazioni

nella (12.09), abbiamo: $$\sum_{n\ge 0}\overline{b}_n(-1)^n = e-1, \tag{12.10}$$

cioè $1+\sum_{n\ge 1}\overline{b}_{2n} - \sum_{n\ge 1}\overline{b}_{2n-1} = e-1$, da cui

$$\sum_{n\ge 1}(\overline{b_{2n}} - \overline{b_{2n-1}}) = e-2 \tag{12.11}$$

La serie indicata al 1° membro della (12.10), è una serie divergente, rappresentata da $(e-1)$.

E' evidente che anche il 1° membro della (12.11), fornisce una serie divergente, rappresentata dal valore $(e-2)$.

12.02 Ponendo nella (12.01), x=iz, abbiamo: $$e^{-(e^{iz}-1)} = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_n\frac{(iz)^n}{n!},\quad \overline{b_0}=1, \overline{b_1}=-1, \tag{12.12}$$

Per z>1, la serie del 2° membro della (12.12), rappresenta una serie divergente, per cui, applicando, alla (12.12), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}e^{-(e^{iz}-1)}dz = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_n\frac{(i)^n}{n!}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz \tag{12.13}$$

Calcolando gli integrali che figurano nella (12.13), ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}e^{-(e^{iz}-1)}dz = e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-z(1-ik)}dz = e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{1-ik} =$$

$$= e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{1+k^2} + ie\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k}{1+k^2}$$

$$\sum_{n\ge 0}\overline{b}_n\frac{(i)^n}{n!}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_n(i)^n = \sum_{n\ge 0}\overline{b}_{2n}(-1)^n + i\sum_{n\ge 0}\overline{b}_{2n+1}(-1)^n$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie delle due precedenti relazioni, troviamo:

$$\sum_{n\ge 0}\overline{b}_{2n}(-1)^n = e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{1+k^2}$$

$$\sum_{n\ge 0}\overline{b}_{2n+1}(-1)^n = e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k}{1+k^2},$$

cioè $$\sum_{n\ge 1}\overline{b}_{4n} - \sum_{n\ge 1}\overline{b}_{4n-2} = e\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{1+k^2} - 1 = 0{,}59155\ ; \tag{12.14}$$

$$\sum_{n\geq 0}\overline{b}_{2n+1}(-1)^n = -\sum_{n\geq 1}\overline{b}_{2n-1}(-1)^n = \overline{b_1}+\sum_{n\geq 1}\overline{b}_{4n+1} - \sum_{n\geq 1}\overline{b}_{4n-1} = e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k}{1+k^2}$$

Da quest'ultima relazione, ricaviamo: $\sum_{n\geq 1}(\overline{b_{4n+1}}-\overline{b_{4n-1}}) = e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k}{1+k^2}+1=0{,}07144.$ (12.15)

Chiaramente, i primi membri delle (12.14) e (12.15) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori 0,59155 e 0,07144.

13.00 Consideriamo la serie: $$\frac{x}{e^{e^x-1}-1} = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (13.01)$$

I primi valori di $\overline{C_n}$ sono dati da: $\overline{C_0}=1, \overline{C_1}=-1, \overline{C_2}=\frac{1}{3}, \overline{C_3}=\frac{1}{4,}, \overline{C_4}=\frac{4}{15}, \overline{C_5}=\frac{1}{6}, \overline{C_6}=-\frac{59}{84}$

La (13.01) è suscettibile di essere trasformata in:

$$\frac{x}{e^{e^x-1}-1} = \frac{x}{e^x-1}\frac{e^x-1}{e^{e^x-1}-1} = \left[\sum_{k\geq 0}B_k\frac{x^k}{k!}\right]\left[\sum_{h\geq 0}B_h\frac{(e^x-1)^h}{h!}\right] = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (13.02)$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, gli ultimi due membri della (13.02), e ponendo dopo, x=0, ricaviamo:

$$\overline{C_n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j\sum_{h=0}^{n-j}B_h S(n-j,h), \qquad n>0, \qquad (13.03)$$

essendo, come è noto, B_j, e, B_h, i numeri di Bernoulli, e, S(n-j,h) i numeri di Stirling di seconda specie.

Per x>1, la serie che figura nell'ultimo membro della (13.02) è divergente, per cui, applicando, alla (13.02), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{e^{e^x-1}-1}dx = (e^x=1+y) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+y)}{e^y-1}\frac{dy}{(1+y)^2} = 0{,}420552$$

$$\sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}$$

Uguagliando i risultati delle precedenti due relazioni, abbiamo: $\sum_{n\geq 0}\overline{C_n} = 0{,}420552.$ (13.04)

La serie che figura al 1° membro della (13.04) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore 0,420552, indicato nel 2° membro della predetta (13.04).

13.01 Sostituendo nella (13.01), -x ad x, ricaviamo: $$\frac{-x}{e^{e^{-x}-1}-1} = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{(-x)^n}{n!} \qquad (13.05)$$

Per x>1, la serie del 2° membro della (13.05) è divergente, per cui, applicando, alla (13.05), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{-x}{e^{e^{-x}-1}-1}dx = (1-e^{-x}=y) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{1-e^{-y}}dy = \sum_{k\geq 0} e^{-k}\sum_{h\geq 0}\frac{k^h}{h!(h+1)^2} = 2{,}20612$$

$$\sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}(-1)^n$$

Uguagliando i risultati delle due ultime relazioni, otteniamo: $\sum_{n\geq 0}\overline{C_n}(-1)^n = 2,20672.$ (13.06)

Il 1° membro della (13.06) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore 2,20672.

13.02 Ponendo nella (13.01), x = iz, ricaviamo: $\frac{iz}{e^{e^{iz}-1}-1} = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{(iz)^n}{n!}$ (13.07)

Per z>1, la serie del 2° membro della (13.07), costituisce una serie divergente, per cui, applicando, alla (13.07), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{iz}{e^{e^{iz}-1}-1}dz = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{(i)^n}{n!}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz$$

$$\int_0^\infty e^{-z}\frac{iz}{e^{e^{iz}-1}-1}dz = (1-e^{-z}=y) = \int_0^1 (1-y)\frac{-i\ln(1-y)}{e^{(1-y)^{-i}-1}-1}\frac{dy}{1-y} =$$

$$= -i\int_0^1 \frac{\ln y}{e^{\cos\ln y - i\sin\ln y - 1}-1}dy = 0{,}750489 - 1{,}082343\, i \qquad (13.08)$$

$$\sum_{n\geq 0}\overline{C_n}\frac{(i)^n}{n!}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz = \sum_{n\geq 0}\overline{C_n}(i)^n = \sum_{n\geq 0}\overline{C_{2n}}(-1)^n - i\sum_{n\geq 1}\overline{C_{2n-1}}(-1)^n \qquad (13.09)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie dei risultati delle relazioni (13.08) e (13.09), troviamo: $\sum_{n\geq 0}\overline{C_{2n}}(-1)^n = 0{,}750489$ (13.10)

$$\sum_{n\geq 1}\overline{C_{2n-1}}(-1)^n = 1{,}082343 \qquad (13.11)$$

I primi membri delle (13.10) e (13.11) costituiscono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori 0,750489 e 1,082343

14.00 Consideriamo la serie:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(\ln x)^k = \frac{1}{1+\ln x} \qquad (14.01)$$

Il 2° membro della (14.01) l'abbiamo ottenuto applicando la (3.04).
Il 1° membro della (14.01) è una serie convergente per $1 \leq x < e$, e divergente per $x \geq e$, per cui, moltiplicando, per e^{-x}, ambo i membri della (14.01), ed integrando, rispetto ad x, tra i limiti uno ed infinito, troviamo una nuova serie divergente, definita da:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_1^\infty (\ln x)^k e^{-x}dx = \int_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{1+\ln x} \qquad (14.02)$$

Operando sulla serie del 1° membro della (14.02), otteniamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k\int_1^\infty(\ln x)^k e^{-x}dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\ge 0}(-1)^k D_\varepsilon^{(k)}\int_1^\infty x^\varepsilon e^{-x}dx \;=\text{(x=1+y)}=$$

$$= e^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\ge 0}(-1)^k D_\varepsilon^{(k)}\int_0^\infty(1+y)^\varepsilon e^{-y}dy \qquad (14.03)$$

Calcoliamo l'integrale che figura nell'ultimo membro della (14.03).

$$\int_0^\infty(1+y)^\varepsilon e^{-y}dy \;=\; \sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\int_0^\infty(1+y)^\varepsilon y^h dy \;=\left(y=\frac{z}{1-z}\right)=$$

$$=\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\int_0^1\left(\frac{1}{1-z}\right)^\varepsilon\left(\frac{z}{1-z}\right)^h\frac{dz}{(1-z)^2}=\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\int_0^1(1-z)^{-\varepsilon-h-2}(z)^h dz \;=$$

$$=\sum_{h\ge 0}\frac{(-1)^h}{h!}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(-\varepsilon-h-1)}{\Gamma(-\varepsilon)}=\sum_{h\ge 0}(-1)^h\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\frac{-\pi}{\sin\pi\varepsilon}}\frac{1}{\Gamma(2+h+\varepsilon)}\frac{\pi}{(\sin\pi\varepsilon)(-1)^h}=$$

$$=-\sum_{h\ge 0}\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2+h+\varepsilon)}\;=\;-\sum_{h\ge 0}\frac{1}{(1+h+\varepsilon)(h+\varepsilon)\ldots(1+\varepsilon)} \qquad (14.04)$$

Sappiamo che: $\dfrac{1}{(1+h+\varepsilon)(h+\varepsilon)\ldots(1+\varepsilon)}=\displaystyle\sum_{r=1}^{h+1}\frac{1}{(r+\varepsilon)(h+1-r)!(-1)^{r-1}(r-1)!}$ = (r=s+1)=

$$=\sum_{s=0}^{h}\frac{(-1)^s}{h!}\binom{h}{s}\frac{1}{s+1+\varepsilon} \qquad (14.05)$$

Tenendo presente i risultati delle (14.03), (14.04) e (14.05), ricaviamo:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k\int_1^\infty(\ln x)^k e^{-x}dx \;=\; -e^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\sum_{h\ge 0}\sum_{s=0}^{h}\frac{(-1)^s}{h!}\binom{h}{s}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)}(s+1+\varepsilon)^{-1-k}(-1)^k=$$

$$=-e^{-1}\sum_{k\ge 0}k!\sum_{h\ge 0}\sum_{s=0}^{h}\frac{(-1)^s}{h!}\binom{h}{s}\frac{1}{(s+1)^{k+1}} \qquad (14.06)$$

Il valore dell'integrale che figura nel 2° membro della (14.02) è uguale a 0,245857.

Abbiamo cioè: $\displaystyle\int_1^\infty\frac{e^{-x}dx}{1+\ln x}=0{,}245857$

Tenendo presente la (14.06),

troviamo: $$\sum_{k\ge 0}k!\sum_{h\ge 0}\sum_{s=0}^{h}\frac{(-1)^s}{h!}\binom{h}{s}\frac{1}{(s+1)^{k+1}} \;=\; -e(0{,}245857) \;=\; -0{,}668307 \qquad (14.07)$$

La serie multipla indicata nel 1° membro della (14.07) definisce una serie divergente, rappresentata dal valore numerico uguale a $-0{,}668307$.

14.01 Consideriamo la serie:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k(\ln x)^{2k} \;=\; \frac{1}{1+(\ln x)^2} \qquad (14.08)$$

Il 2° membro della (14.08) l'abbiamo ottenuto applicando la (3.04).
Il 1° membro della (14.08) è una serie che converge per $e^{-1}<x<e$, e diverge per $0<x\le e^{-1}$, e per $x\ge e$. Pertanto, applicando alla (14.08) l'integrale di cui al punto **3.01**, otteniamo una nuova serie divergente, definita da:

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k\int_0^\infty(\ln x)^{2k}e^{-x}dx \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{1+(\ln x)^2} \qquad (14.09)$$

Operando sui due membri della (14.09), troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty (\ln x)^{2k} e^{-x}dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\geq 0}(-1)^k D_\varepsilon^{(2k)}\int_0^\infty x^\varepsilon e^{-x}dx \;=\; \sum_{k\geq 0}(-1)^k \Gamma^{(2k)}(1) \qquad (14.10)$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{1+(\ln x)^2} = 0{,}608816 \qquad (14.11)$$

Uguagliando il risultato della (14.10) con quello della (14.11), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \Gamma^{(2k)}(1) \;=\; 0{,}608816 \qquad (14.12)$$

Nell'Allegato B, punto 7), abbiamo riportato un procedimento per il calcolo di $\Gamma^{(k)}(1)$.

14.02 Moltiplicando, per $\frac{x^{q-1}}{1+x}$, 0<Re(q)<1, ambo i membri della (14.08), ed integrando, rispetto ad x, tra i limiti zero ed infinito, otteniamo un'altra serie divergente, definita da:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty (\ln x)^{2k}\frac{x^{q-1}}{1+x}dx \;=\; \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}\frac{dx}{1+(\ln x)^2} \qquad (14.13)$$

Operando, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty (\ln x)^{2k}\frac{x^{q-1}}{1+x}dx \;=\; \sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)}\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}dx \;=\; \sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)}\left(\frac{\pi}{\sin\pi q}\right); \qquad (14.14)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}\frac{dx}{1+(\ln x)^2} \;=\; (x=e^z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{qz}}{1+e^z}\frac{dz}{1+z^2} \qquad (14.15)$$

Il calcolo dell'integrale indicato nel 2° membro della (14.15), l'abbiamo riportato nell'Appendice B, punto 8), ed abbiamo ottenuto:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{qz}}{1+e^z}\frac{dz}{1+z^2} \;=\; -2\pi\sum_{h\geq 0}\frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} +$$

$$+2i\pi\sum_{h\geq 0}\frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} - \frac{i\pi}{2}\frac{\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} \qquad (14.16)$$

Uguagliando il risultato della (14.14) con quello della (14.16), troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)}\left(\frac{\pi}{\sin\pi q}\right) \;=\; -2\pi\sum_{h\geq 0}\frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} +$$

$$+2i\pi\sum_{h\geq 0}\frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} - \frac{i\pi}{2}\frac{\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} \qquad (14.17)$$

La (14.17) è una relazione molto suggestiva.

Sviluppando il 1° membro della (14.17), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)}\left(\frac{\pi}{\sin\pi q}\right) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)}\left(2\pi i\sum_{h\geq 0}e^{-i\pi q(2h+1)}\right) = 2\pi i\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}e^{-i\pi q(2h+1)} =$$

$$= 2\pi i\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}\{\cos[\pi q(2h+1)] - i\sin[\pi q(2h+1)]\} =$$

$$= 2\pi\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}\sin[\pi q(2h+1)] + 2\pi i\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}\cos[\pi q(2h+1)] \qquad (14.18)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie tra l'ultimo membro della relazione precedente (14.18) ed il 2° membro della (14.17), troviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}\sin[\pi q(2h+1)] = -\sum_{h\geq 0}\frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{1}{4}\frac{\cos(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} \qquad (14.17a)$$

$$\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(2h+1)^{2k}\cos[\pi q(2h+1)] = \sum_{h\geq 0}\frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} - \frac{1}{4}\frac{\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos\frac{1}{2}} \qquad (14.18a)$$

Per q = $\frac{1}{2}$, abbiamo, come è noto, $\sin[\pi q(2h+1)] = (-1)^h$, e, $\cos[\pi q(2h+1)] = 0$.

Pertanto, dalla (14.17a), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}\pi^{2k}\sum_{h\geq 0}(-1)^h[(2h+1)^{2k}] = -\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^h}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{\cos\frac{1}{2}} = 0{,}180758, \qquad (14.17b)$$

mentre il 1° ed il 2° membro della (14.18a) sono nulli.
Dalla (14.17), invece, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\frac{\pi}{\sin\pi q}\right)^{(2k)}_{q=o,5} = -2\pi\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^h}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\frac{1}{2}} = 1{,}135737 \qquad (14.18b)$$

Le serie indicate al 1° membro delle (14.17b) e (14.18b) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori numerici 0,180758, e, 1,135737.

14.03 Riprendiamo la (14.08)

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(\ln x)^{2k} = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \qquad (14.19)$$

Moltiplicando, per $\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}$, ambo i membri della (14.08), ed integrando, rispetto ad x, tra i limiti zero ed infinito, otteniamo un'altra serie divergente, definita da:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty(\ln x)^{2k}\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}dx = \int_0^\infty\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}\frac{dx}{1+(\ln x)^2} \qquad (14.20)$$

Ponendo x= e^z, nel 1° membro della (14.20), otteniamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty(\ln x)^{2k}\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}dx = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\int_0^\infty D_q^{(2k)}\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}dx =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz \tag{14.21}$$

L'integrale indicato nell'ultimo membro della (14.21), l'abbiamo calcolato nell'Appendice B, punto 9), utilizzando il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz = -2\pi i \sum_{h\geq 0} \frac{e^{i\pi q(2h+1)}}{1+i\pi(2h+1)} + i\pi \frac{e^{1-q}}{e+1} \tag{14.22}$$

Sostituendo la precedente nella (14.21), ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} dx = \sum_{k\geq 0}(-1)^k D_q^{(2k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz =$$

$$= 2\pi \sum_{k\geq 0} \pi^{2k} \sum_{h\geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\sin[\pi q(2h+1)] - \pi(2h+1)\cos[\pi q(2h+1)]] +$$

$$-2\pi i \sum_{k\geq 0} \pi^{2k} \sum_{h\geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\pi(2h+1)\sin[\pi q(2h+1)] + \cos[\pi q(2h+1)]] + i\pi \frac{e^{1-q}}{e+1}; \tag{14.23}$$

ponendo, x=e^z, nell'ultimo membro della (14.20), ricaviamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} \frac{dx}{1+(\ln x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2} \tag{14.24}$$

L'integrale indicato al 2° membro della (14.24) l'abbiamo calcolato nell'Appendice B, punto 10), utilizzando il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi \sum_{k\geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1)\cos[\pi q(2k+1)]}{1-\pi^4(2k+1)^4} +$$

$$+ \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) - \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} + 2\pi i \sum_{k\geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1)\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{i\pi}{2} \frac{e^{1-q}}{e+1} +$$

$$-\frac{i\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) + \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} \tag{14.25}$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie dei secondi membri delle (14.23) e (14.25), otteniamo:

$$2\pi \sum_{k\geq 0} \pi^{2k} \sum_{h\geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\sin[\pi q(2h+1)] - \pi(2h+1)\cos[\pi q(2h+1)]] =$$

$$= 2\pi \sum_{k\geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1)\cos[\pi q(2k+1)]}{1-\pi^4(2k+1)^4} + \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) - \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})}; \tag{14.26}$$

$$-2\pi \sum_{k\geq 0} \pi^{2k} \sum_{h\geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\pi(2h+1)\sin[\pi q(2h+1)] + \cos[\pi q(2h+1)]] + \pi \frac{e^{1-q}}{e+1} =$$

$$= 2\pi \sum_{k\geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1)\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{\pi}{2} \frac{e^{1-q}}{e+1} - \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) + \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} \tag{14.27}$$

Per q = $\frac{1}{2}$, abbiamo: $\sin \pi q(2h+1) = (-1)^h$, $\cos \pi q(2h+1) = 0$, e, quindi, dalla (14.26) e (14.27) ricaviamo:

$$\sum_{k\geq 0} \pi^{2k} \sum_{h\geq 0} \frac{(-1)^h (2h+1)^{2k}}{1+\pi^2 (2h+1)^2} = -\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{\pi^4 (2k+1)^4 - 1} + \frac{1}{8\cos(\frac{1}{2})} = 0{,}132178 \qquad (14.28)$$

$$\sum_{k\geq 0} \pi^{2k+1} \sum_{h\geq 0} \frac{(-1)^h (2h+1)^{2k+1}}{1+\pi^2 (2h+1)^2} = -\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{\pi^4 (2k+1)^4 - 1} + \frac{1}{8\cosh(\frac{1}{2})} +$$

$$+ \frac{1}{8\cos(\frac{1}{2})} = 0{,}221704 \qquad (14.29)$$

Osserviamo che le serie indicate nei primi membri delle (14.26) e (14.27) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori dei secondi membri delle medesime (14.26) e (14.27).
Anche le serie indicate nei primi membri delle (14.28) e (14.29), sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai numeri 0,132178 e 0,221704

Conclusioni

Nel corso dell'esposizione dello studio in parola, abbiamo rilevato un numero cospicuo di serie divergenti, a ciascuna delle quali corrisponde un numero o un'espressione numerica finita; abbiamo anche constatato che è possibile utilizzare le serie divergenti nello sviluppo dei normali calcoli matematici.
Ciò corrisponde esattamente a quanto segnalato dal matematico francese Émile Borel, il quale, nell'Introduzione al Testo [6] , a pag. 13, affermava:
Le problème fondamental est le suivant: Faire correspondre à chaque série divergente numérique d'une classe aussi large que possibile, un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans le calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts , ou du moins presque toujours exacts.

Un vivissimo ringraziamento va rivolto a tutti coloro che, con il loro contributo e con i loro utilissimi suggerimenti, hanno consentito il completamento del presente lavoro. Un particolare ringraziamento va al Prof. Ing. Filippo Aluffi Pentini dell'Università di Roma " Sapienza" per la sua continua, cordiale assistenza e collaborazione.

Siamo grati a tutti coloro che inoltreranno osservazioni o suggerimenti, indirizzando a:

p.cutolo@inwind.it

Appendice A

L'integrale E = $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}} dx$, indicato al 2° membro della (3.16), può essere calcolato con uno dei seguenti metodi:

1) **Metodo delle integrazioni per parti**

Integrando, successivamente, per parti, l'integrale $\mathrm{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx$, ricaviamo:

$$\mathrm{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \int_0^\infty e^{-x}\frac{d(1+x)^{-n}}{-n} = \frac{1}{-n}\left[(1+x)^{-n}e^{-x} - \int (1+x)^{-n}(-dx)\right]_0^\infty = \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!n\binom{n-1}{k}} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx \tag{A.1}$$

L'integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ è stato già svolto e riportato dalla (3.02). Quindi abbiamo:

$$\mathrm{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\binom{n-1}{k}^{-1}}{k!n} + \frac{(-1)^n e}{n!}\left[-\gamma + \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(k+1)}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! - \frac{(-1)^n e}{n!}\left[\gamma + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\right] \tag{A.2}$$

Osserviamo che l'integrale indicato nella formula (3.02) può essere espresso da:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}dx = (1+x=e^y) = \int_0^\infty e^{-y}e^{-e^y+1}e^y dy = e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-y}e^{(k+1)y}dy =$$
$$= e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{h\geq 0}(k+1)^h \tag{A.3}$$

Confrontando la (A.3) con la (3.02), ricaviamo la seguente formula:

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{h\geq 0}(k+1)^h = -\left[\gamma + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!k}\right] = 0{,}219383 \tag{A.4}$$

2) Metodo dell'uso degli integrali di Eulero divergenti

Utilizzando gli integrali di Eulero divergenti, (vedasi Pasquale Cutolo: "Una nota sull'uso degli integrali di Eulero divergenti " Articolo riportato sia da "LA COMUNICAZIONE- Note, Recensioni, Notizie-dell'Istituto Superiore C.T.I. Anno 2003, Volume LII", sia da Internet "Matematicamente.it/approfondimenti/ideeinteressanti"), otteniamo:

$$\mathrm{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty \frac{x^k}{(1+x)^{n+1}}dx = (x = \frac{y}{1-y}) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 (\frac{y}{1-y})^k (1-y)^{n+1+\varepsilon}\frac{dy}{(1-y)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (y)^k (1-y)^{n-1+\varepsilon-k} dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+\varepsilon-k)}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(n+\varepsilon)} \binom{n-1+\varepsilon}{k}^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(n+\varepsilon)} \binom{n-1+\varepsilon}{k}^{-1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+\varepsilon)} \binom{n-1+\varepsilon}{k}^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(n)} \binom{n-1}{k}^{-1} + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(n+\varepsilon-k)}{\Gamma(n+1+\varepsilon)}$$

Ponendo, nell'ultima sommatoria della precedente relazione, k = n+h, ricaviamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(n+\varepsilon-k)}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\Gamma(\varepsilon-h)\Gamma(h+1)}{h!\Gamma(1+\varepsilon)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^1 t^h (1-t)^{\varepsilon-h-1} dt = (t = \frac{y}{1+y}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^{\infty} (\frac{y}{1+y})^h (\frac{1}{1+y})^{\varepsilon-h-1} \frac{dy}{(1+y)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1+\varepsilon)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^{\infty} \frac{y^h}{(1+y)^{1+\varepsilon}} dy = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{1+y} dy$$

Pertanto: $E = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(n)} \binom{n-1}{k}^{-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{1+y} dy =$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! - \frac{(-1)^n e}{n!} \left[\gamma + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!k} \right] \qquad \text{(A.5)}$$

che è identica alla (3.12)

3) Metodo del limite e derivata

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}} dx = \lim_{a \to 1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(a+x)^{n+1}} dx = \lim_{a \to 1} D_a^{(n)} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx =$$

$= \lim_{a \to 1} D_a^{(n)} \frac{(-1)^n}{n!} (I_1) = E$, avendo posto $E = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}} dx$, ed

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx = (x = ay,\ a>0) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y} dy \qquad \text{(A.6)}$$

Abbiamo utilizzato la formula $D_a^{(n)}(a+x)^{-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)}(a+x)^{-1-n}(-1)^n$,

Quindi: $$\lim_{a\to 1} D_a^{(n)}(I_1) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}(-y)^n}{1+y}dy = -\int_0^\infty \frac{e^{-y}\left[1-(-y)^n-1\right]}{1+y}dy =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{e^{-y}\left[1-(-y)^n\right]}{1+y}dy + \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{1+y}dy$$

Ora, è noto che: $\frac{1-(-y)^n}{1+y} = \sum_{k=0}^{n-1}(-y)^k$; pertanto:

$$-\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-y}\left[1-(-y)^n\right]}{1+y}dy = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^\infty y^k e^{-y}dy =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1-k}k!}{n(n-1)!}\frac{(n-1-k)!}{(n-1-k)!}$$

Posto, n-1-k = h, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1-k}k!}{n(n-1)!}\frac{(n-1-k)!}{(n-1-k)!} = \sum_{h=0}^{n-1}\frac{(-1)^h}{h!n}\binom{n-1}{h}^{-1}$$

In definitiva, otteniamo:

$$\text{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \sum_{h=0}^{n-1}\frac{(-1)^h}{h!n}\binom{n-1}{h}^{-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{1+y}dy$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k! + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{1+y}dy$$

che è perfettamente identica alla (3.12).

4) Osserviamo che l'integrale E = $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx$ può essere calcolato ed espresso anche nel modo seguente:

Posto 1+x = e^z, ricaviamo:

$$\text{I} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \int_0^\infty e^{-z(n+1)}e^{-(e^z-1)}e^z dz = e\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(n-k)z}dz =$$

$$= \text{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{n-k} + e\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(n-k)z}dz$$

Ponendo, nell'ultimo integrale della precedente relazione, k = n+h, troviamo:

$$e\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(n-k)z}dz = e\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^{n+h}}{(n+h)!}\int_0^\infty e^{hz}dz = e\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^{n+h}}{(n+h)!}\int_0^\infty e^{(h+1)z}e^{-z}dz =$$

$$= e(-1)^n\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^h}{(n+h)!}\sum_{j\geq 0}(h+1)^j$$

Pertanto, $$\text{E} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}dx = \text{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{n-k} + e(-1)^n\sum_{h\geq 0}\frac{(-1)^h}{(n+h)!}\sum_{j\geq 0}(h+1)^j \qquad \text{(A.7)}$$

Confrontando la (A.7) con la (A.2), ricaviamo:

$$(-1)^n \sum_{h\geq 0} \frac{(-1)^h}{(n+h)!} \sum_{j\geq 0} (h+1)^j =$$

$$= e^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k! - \frac{(-1)^n}{n!} \left[\gamma + \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!k} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{n-k}$$

Appendice B

1) Calcolo e sviluppo dell'integrale F= $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+xt} dtdx$

Posto $x = y^2, t = z^2$, abbiamo:

$$\text{F} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(x+t)}}{1+xt} dtdx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(y^2+z^2)} 4yzdydz}{1+y^2z^2}$$

Ponendo $y = \rho \sin\theta, z = \rho\cos\theta, dydz = \rho d\theta d\rho$, $\rho^2 = \mu$, ricaviamo:

$$\text{F} = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\mu} \mu (\sin 2\theta) d\mu d\theta}{1+(\frac{\mu}{2}\sin 2\theta)^2} = \int_0^\infty e^{-\mu} \mu d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin 2\theta) d\theta}{1+(\frac{\mu}{2}\sin 2\theta)^2} = \int_0^\infty e^{-\mu} \mu d\mu (F1) \tag{B1.1}$$

avendo posto F1 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin 2\theta) d\theta}{1+(\frac{\mu}{2}\sin 2\theta)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos 2\theta}{1+\frac{\mu^2}{4}(1-\cos^2 2\theta)}$

Posto $\cos 2\theta = u$, ricaviamo:

$$\text{F1} = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{du}{1+\frac{\mu^2}{4}(1-u^2)} = \frac{1}{2} \frac{4}{\mu^2} \int_1^{-1} \frac{du}{u^2 - (1+\frac{4}{\mu^2})} =$$

$$= \frac{2}{\mu^2} \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{4}{\mu^2}}} \left[\ln(u - \sqrt{1+\frac{4}{\mu^2}}) - \ln(u + \sqrt{1+\frac{4}{\mu^2}}) \right]_1^{-1} = \frac{2}{\mu\sqrt{4+\mu^2}} \ln \frac{\mu + \sqrt{4+\mu^2}}{\mu - \sqrt{4+\mu^2}}$$

Sostituendo il risultato di F1 in (B1.1), abbiamo:

$$\text{F} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\mu}\mu}{\mu\sqrt{4+\mu^2}} (\ln \frac{\mu + \sqrt{4+\mu^2}}{\mu - \sqrt{4+\mu^2}}) d\mu$$

Posto $\mu = 2\sinh t$, ricaviamo:

$$\text{F} = 4\int_0^\infty te^{-2\sinh t} dt = 0{,}668091$$

2) Calcolo e sviluppo dell'integrale G = $\int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2} \frac{dx}{\pi^2 + x^2}$

Integrando per parti, otteniamo:

$$G=\int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\frac{dx}{\pi^2+x^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2}{\pi^2+x^2} d\coth x = -\left[\frac{x^2}{\pi^2+x^2}\coth x - \int \coth x \frac{2\pi^2 x dx}{(\pi^2+x^2)^2}\right]_0^\infty =$$

$= -1+2\pi^2\int_0^\infty \frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x dx$, in quanto:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\pi^2+x^2}\coth x = 1$, e, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\pi^2+x^2}\coth x = 0$

Ora, $\int_0^\infty \frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x dx$

Utilizzando il teorema dei residui, più esattamente il 2° teorema integrale di Cauchy, abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+c} f(z)dz = R(z_1)+R(z_2)+R(z_3)+... \qquad \text{(B2.1)}$$

dove $R(z_1), R(z_2), R(z_3),...$, rappresentano i residui della funzione f(z), nei punti singolari isolati (poli) $z_1, z_2, z_3,...$, di f(z), interni alla curva semplice e chiusa c; il calcolo dell'integrale curvilineo lungo la curva chiusa c, va eseguito nel senso antiorario.
I poli $z_1, z_2, z_3,...$, sono i punti singolari isolati del campo complesso, interni alla curva c, che fanno assumere un valore infinito alla funzione f(z).
Il residuo $R(z_0)$ di un polo di ordine n, di una funzione f(z), nel punto singolare isolato z_0, è definito da:

$$R(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}\frac{1}{(n-1)!} \qquad \text{(B2.2)}$$

(vedasi Testo [9] , pag. 43).
Per il calcolo dei residui della funzione integranda

$$f(z) = \frac{z}{(\pi^2+z^2)^2}\coth z \qquad \text{(B2.3)}$$

abbiamo scelto una curva chiusa c, costituita :
- da una semicirconferenza, di raggio ρ ,situata nel semipiano, y>o, del piano complesso, z = x+iy, con centro coincidente con l'origine degli assi dello stesso piano complesso;
- dal diametro 2ρ della semicirconferenza, giacente sull'asse delle ascisse di detto piano, diminuito di un segmento uguale a 2ε;
- da una semicirconferenza, di raggio $\varepsilon << \pi$, concentrica a quella di raggio ρ , nel semipiano y>0. Il raggio ρ è tale che, sulla curva scelta c, non ci siano punti singolari di f(z). **(vedasi fig. 1)**

Dalla (B2.3) rileviamo che f(z) presenta un polo, di terzo ordine, nel punto $z_1 = i\pi = a$, ed infiniti poli semplici $z_k = ik\pi = b$, (k=2,3,4,…), per cui sinha=0, cosha= -1, sinhb=0, coshb=$(-1)^k$
Per semplicità di scrittura, i valori dei poli li abbiamo indicati con (a) e (b)
Applicando la (B2.1), otteniamo:

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x dx + \int_\varepsilon^\rho \frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x dx + \int_0^\pi \frac{\rho e^{i\theta}}{(\pi^2+\rho^2 e^{2i\theta})^2}\frac{\cosh(\rho e^{i\theta})}{\sinh(\rho e^{i\theta})}\rho e^{i\theta} i d\theta \; +$$

$$-\int_0^\pi \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{(\pi^2+\varepsilon^2 e^{2i\theta})^2}\frac{\cosh(\varepsilon e^{i\theta})}{\sinh(\varepsilon e^{i\theta})}\varepsilon e^{i\theta} i d\theta = 2\pi i[R(z_1)+R(z_2)+R(z_3)+...] \qquad \text{(B2.4)}$$

La somma dei primi due integrali del 1° membro della (B2.4) rappresenta l'integrale lungo il diametro, diminuito di un segmento pari a (2ε), giacente sull'asse delle x, della semicirconferenza di raggio ρ, mentre gli altri due integrali rappresentano, rispettivamente, l'integrale lungo la semicirconferenza di raggio ρ ,

e l'integrale lungo la semicirconferenza di raggio ε, calcolati nel senso antiorario.
Passando al limite per $\rho \to \infty$, e per $\varepsilon \to 0$, il 3° ed il 4° integrale della (B2.4), si annullano, e quindi

otteniamo:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(\pi^2+x^2)^2} \coth x dx = 2\pi i [R(z_1)+R(z_2)+R(z_3)+...] \quad \text{(B2.5)}$$

Applicando la (B2.2), calcoliamo i residui R(a) e R(b).

$$\text{R(a)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{2}\left[\frac{(z-a)^3}{(\pi^2+z^2)^2}\frac{\cosh z}{\sinh z}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to a}\left[\frac{(z-a)}{(z+a)^2}\frac{\cosh z}{\sinh z}\right]'' \quad \text{(B2.6)}$$

Nel passaggio dal 1° al 2° limite della (B2.6) abbiamo effettuato la seguente sostituzione:
$z^2+\pi^2 = (z-i\pi)(z+i\pi) = (z-a)(z+a)$
Per il calcolo della derivata prima e seconda, rispetto a z, della funzione posta tra le parentesi quadre del 2° limite della (B2.6), poniamo:

$$\text{P(z)} = \frac{z-a}{\sinh z}, \qquad \text{Q(z)} = \frac{z\cosh z}{(z+a)^2},$$

Operando, abbiamo:

$$\left[\frac{(z-a)}{(z+a)^2}\frac{\cosh z}{\sinh z}\right]'' = [P(z)Q(z)]'' = \text{P(z)Q''(z)} + 2\text{P'(z)Q'(z)} + \text{Q(z)P''(z)} \quad \text{(B2.7)}$$

$$\lim_{z\to a} P(z) = P(a) = \frac{1}{\cosh a}; \qquad \lim_{z\to a} Q(z) = Q(a) = \frac{a\cosh a}{4a^2};$$

$$\text{P'(z)} = \frac{\sinh z-(z-a)\cosh z}{(\sinh z)^2}; \quad \lim_{z\to a} P'(z) = \text{P'(a)} = \lim_{z\to a}\frac{\cosh z-\cosh z-(z-a)\sinh z}{2\sinh z\cosh z} = 0$$

$$\text{Q'(z)} = (z+a)^{-2}\cosh z + (z+a)^{-2} z\sinh z - 2(z+a)^{-3} z\cosh z =$$
$$= \frac{(z+a)\cosh z+(z+a)z\sinh z-2z\cosh z}{(z+a)^3} = \frac{(z+a)z\sinh z-(z-a)\cosh z}{(z+a)^3};$$

$$\lim_{z\to a} Q'(z) = Q'(a) = 0$$

$$\text{P''(z)} = \frac{(\sinh z)^2[\cosh z-\cosh z-(z-a)\sinh z]-[\sinh z-(z-a)\cosh z]2\sinh z\cosh z}{(\sinh z)^4} =$$
$$= \frac{(\sinh z)[-(z-a)\sinh z]-[\sinh z-(z-a)\cosh z]2\cosh z}{(\sinh z)^3};$$

$$\lim_{z\to a} P''(z) = P''(a) = -\frac{1}{\cosh a} - 2\lim_{z\to a}\left[\cosh z\frac{\cosh z-\cosh z-(z-a)\sinh z}{3\cosh z(\sinh z)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\cosh a} + \frac{2}{3}\frac{1}{\cosh a} = -\frac{1}{3\cosh a}$$

$$\text{Q''(z)} = (z+a)^{-3}[(z+a)\sinh z + z\sinh z + z(z+a)\cosh z - (z-a)\sinh z) - \cosh z] +$$
$$-3(z+a)^{-4}[z(z+a)\sinh z-(z-a)\cosh z]$$

$$\lim_{z\to a} Q''(z) = Q''(a) = (2a)^{-3}(2a^2\cosh a - \cosh a) = \frac{(2a^2-1)\cosh a}{8a^3}$$

Sostituendo i valori ottenuti nella (B2.7), e poi nella (B2.6), otteniamo:

$$R(a) = \frac{1}{2}\left[P(a)Q''(a)+2P'(a)Q'(a)+Q(a)P''(a)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cosh a}\,\frac{(2a^2-1)\cosh a}{8a^3} - \frac{a\cosh a}{4a^2}\,\frac{1}{3\cosh a}\right] =$$

$$= \frac{1}{8a} - \frac{1}{16a^3} - \frac{1}{24a} = \frac{1}{12a} - \frac{1}{16a^3} = \frac{1}{12i\pi} + \frac{1}{16i\pi^3}$$

Quindi, $$2\pi i R(a) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8\pi^2} \qquad \text{(B2.8)}$$

Passiamo, ora, al calcolo di R(b), essendo b=$ik\pi$, (k=2,3,4,…)

$$R(b) = \lim_{z\to b} \frac{z-b}{\sinh z}\,\frac{z\cosh z}{(z^2+\pi^2)^2} = \lim_{z\to b} \frac{1}{\cosh z}\,\frac{z\cosh z}{(z^2+\pi^2)^2} = \frac{b}{(b^2+\pi^2)^2} = \frac{ik\pi}{(\pi^2-k^2\pi^2)^2}$$

Pertanto: $$2\pi i\sum_{k\geq 2} R(ik\pi) = 2\pi i \sum_{k\geq 2}\frac{ik\pi}{\pi^4(k^2-1)^2} = \frac{-2}{\pi^2}\sum_{k\geq 2} k\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right]\frac{1}{4k} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi^2}\sum_{k\geq 2}\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = \frac{-1}{2\pi^2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots-\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)\right] = \frac{-5}{8\pi^2}$$

In definitiva, troviamo:

$$G = \int_0^\infty \frac{x^2}{(shx)^2}\,\frac{dx}{\pi^2+x^2} = -1 + \frac{2\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(\pi^2+x^2)^2}\coth x\,dx =$$

$$= -1 + \pi^2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8\pi^2}-\frac{5}{8\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}$$

che è perfettamente identica alla (5.05).

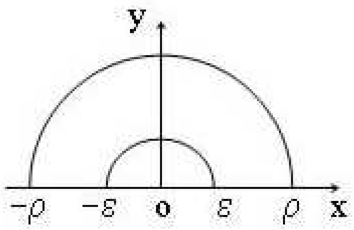

fig.1

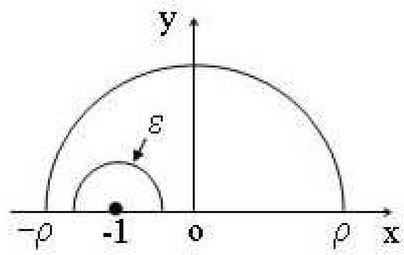

fig.2

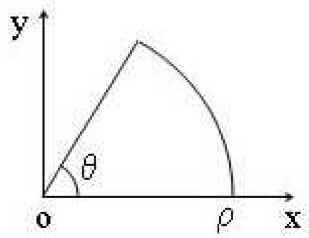

fig.3

3.0) Verifica della formula $B_{2n} = (-1)^{n-1}\pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx$, (n, intero positivo)

Osserviamo che: $$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx, \qquad \text{(B3.1)}$$

Applicando il 2° teorema integrale di Cauchy, utilizzando la stessa curva c di cui al punto 2) dell'Appendice B, **(fig. 1),** otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = 2\pi i R(b), \quad \text{essendo b= } i\pi k\text{, (k=1,2,3,…)} \qquad \text{(B3.2)}$$

Osserviamo che la funzione integranda presenta infiniti punti isolati di secondo ordine, all'interno della curva c. Applicando la (B2.1), abbiamo:

$$R(b) = \lim_{z\to b}\left[\frac{(z-b)^2}{(\sinh z)^2} z^{2n}\right]' = \lim_{z\to b}\left[\frac{(z-b)^2}{(\sinh z)^2} 2nz^{2n-1} + z^{2n} 2(\frac{z-b}{\sinh z})\frac{\sinh z-(z-b)\cosh z}{(\sinh z)^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{(\cosh z)^2} 2nb^{2n-1}\right] = 2\text{n}\,(i\pi k)^{2n-1}, \qquad \text{(B3.3)}$$

in quanto $(\cosh b)^2 = 1$, e, $\lim_{z\to b}\left[z^{2n}(\frac{z-b}{\sinh z})\frac{\sinh z-(z-b)\cosh z}{(\sinh z)^2}\right] = 0$

Pertanto, $2\pi i R(b) = 4\text{n}\,(i\pi)^{2n} k^{2n-1} = 4\text{n}\,(\pi)^{2n} k^{2n-1} (-1)^n$

$$2\pi i \sum_{k\ge1} R(i\pi k) = 4\text{n}\,(\pi)^{2n}(-1)^n \sum_{k\ge1} k^{2n-1},$$

e, quindi, per le (B3.1) e (B3.2), abbiamo: $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = 2\text{n}\,(\pi)^{2n}(-1)^n \sum_{k\ge1} k^{2n-1}$

Tenendo presente la (4.09), ricaviamo:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = 2\text{n}\,(\pi)^{2n}(-1)^n \sum_{k\ge1} k^{2n-1} = 2\text{n}\,(\pi)^{2n}(-1)^n(-\frac{B_{2n}}{2n}).$$

cioè: $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = (\pi)^{2n}(-1)^{n-1}B_{2n}$, da cui

$$B_{2n} = (-1)^{n-1}\pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx \qquad \text{(c.v.d.)}$$

3.1) Potevamo verificare la (5.03) in modo molto più semplice ed elegante, utilizzando il **metodo del limite e derivata**.

Infatti, abbiamo: $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = \int_0^\infty x^{2n}(\frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}})^2 dx = (e^{-2x}=y) = 2^{1-2n}\int_0^1 \frac{(\ln y)^{2n}}{(1-y)^2}dy =$

$$= 2^{1-2n} \lim_{\varepsilon\to0} D_\varepsilon^{(2n)} \int_0^1 \frac{y^\varepsilon}{(1-y)^2}dy \text{ ; ora } \int_0^1 \frac{y^\varepsilon}{(1-y)^2}dy = -\lim_{\mu\to1} D_\mu \int_0^1 \frac{y^\varepsilon}{\mu-y}dy = (y=\mu z) =$$

$$= -\lim_{\mu\to1} D_\mu \int_0^{\frac{1}{\mu}} (\mu z)^\varepsilon \frac{dz}{1-z} = -\lim_{\mu\to1} D_\mu \sum_{k\ge0} \frac{\mu^\varepsilon}{\varepsilon+k+1}\frac{1}{\mu^{\varepsilon+k+1}} = \sum_{k\ge0}\frac{k+1}{\varepsilon+k+1} \text{ ; pertanto:}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = 2^{1-2n} \lim_{\varepsilon\to0} \sum_{k\ge0} (k+1)\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(1)}(\varepsilon+k+1)^{-1-2n}(-1)^{2n} = 2^{1-2n}(2n)!\zeta(2n)$$

Ricordando che: $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|$ (vedasi testo [4], pag.1074, formula 9.542-1),

troviamo: $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx = \pi^{2n}|B_{2n}|$, da cui $|B_{2n}| = \pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx$

Poiché $B_{4n} < 0, e, B_{4n-2} > 0$, abbiamo: $B_{2n} = (-1)^{n-1}\pi^{-2n}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(shx)^2}dx$

4.0) Calcolo e sviluppo dell'integrale H= $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4z^2}\frac{1}{\cosh(\pi z)}dz$

Utilizzando il 2° teorema integrale di Cauchy, e seguendo lo stesso procedimento indicato al punto 2) dell'Appendice B, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4z^2}\frac{1}{\cosh(\pi z)}dz \ = \ 2\pi i[R(z_1)+R(z_2)+R(z_3)+...]$$

Abbiamo scelto una curva c identica a quella utilizzata nell'Appendice B-punto2), **(vedasi fig. 1).**

I poli della funzione integranda sono:

$$z_1 = \frac{i}{2} = a\,, \qquad\qquad z_k = ik + \frac{i}{2} = b\,, \quad \text{(k=1,2,3,…)}$$

Abbiamo quindi un polo di 2° ordine nel punto $z_1 = \frac{i}{2} = a$, ed infiniti poli semplici nei punti $z_k = ik + \frac{i}{2} = b$

Il residuo R(a) è definito da:

$$\text{R(a)} \ = \lim_{z\to a}\left[\frac{(z-a)^2}{(1+4z^2)}\frac{1}{\cosh(\pi z)}\right]' = \lim_{z\to a}\left[\frac{(z-a)}{4(z-a)(z+a)}\frac{(z-a)}{\cosh(\pi z)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to a}[\frac{1}{4(z+a)}\frac{\cosh(\pi z)-(z-a)\pi\sinh(\pi z)}{(\cosh(\pi z))^2} + \frac{z-a}{\cosh(\pi z)}\frac{-1}{4(z+a)^2}] =$$

$$= \lim_{z\to a}[\frac{1}{8a}\frac{\pi\sinh(\pi z)-(z-a)\pi^2\cosh(\pi z)-\pi\sinh(\pi z)}{2\pi\cosh(\pi z)\sinh(\pi z)} + \frac{1}{\pi\sinh(\pi z)}\frac{-1}{16a^2}] =$$

$$= -\frac{1}{16a^2\pi\sinh(\pi a)}$$

Essendo a=i/2, abbiamo $\sinh(\frac{i\pi}{2}) = \text{i}$, e quindi:

$$2\pi i R(a) = 2\pi i\frac{-1}{16(\frac{i}{2})^2\pi i} = \frac{1}{2} \tag{B4.1}$$

$$\text{R(b)} = \lim_{z\to b}\frac{(z-b)}{(1+4z^2)\cosh(\pi z)} = \lim_{z\to b}\frac{1}{(1+4z^2)\pi\sinh(\pi z)} = \frac{1}{1+4b^2}\frac{1}{\pi\sinh(\pi b)}$$

Essendo b = ik + i/2, abbiamo $\sinh(\pi b) = i(-1)^k$, e quindi:

$\text{R(b)} = \dfrac{-1}{1-4(k+\frac{1}{2})^2}\dfrac{i}{\pi}(-1)^k$; pertanto:

$$2\pi i\sum_{k\geq 1} R(b) \ = \ 2\pi i\sum_{k\geq 1}\frac{-4(-1)^k}{4-4(2k+1)^2}\frac{i}{\pi} = -2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{2k(2k+2)} = \frac{-1}{2}\sum_{k\geq 1}(-1)^k(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \ = \ \ln 2 \ - \frac{1}{2} \tag{B4.2}$$

In definitiva, sommando i risultati della (B4.1) e della (B4.2) abbiamo:

$$\text{H} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4z^2}\frac{1}{\cosh(\pi z)}dz \ = \ln 2, \qquad \text{(c.v.d.)}$$

4.1) Verifica della formula $E_{2n}=(-1)^n(\frac{2}{\pi})^{2n+1}\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}$

Ponendo, $x=e^z$, otteniamo:

$$\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}e^z}{1+e^{2z}}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}}{e^z+e^{-z}}dz$$

Applicando il 2° teorema integrale di Cauchy alla stessa curva c, di cui al punto 2) dell'Appendice B, **(fig. 1),** ricaviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}}{e^z+e^{-z}}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2\cosh z}dz=2\pi i\sum_{k\geq 0}R(b)\text{, essendo b=}\frac{i\pi(2k+1)}{2}$$

Pertanto, $R(b)=\lim_{z\to b}\frac{(z-b)z^{2n}}{2\cosh z}=\lim_{z\to b}\frac{z^{2n}}{2\sinh z}=\frac{b^{2n}}{2\sinh b}=\frac{(-1)^n\pi^{2n}(2k+1)^{2n}}{2^{2n}[i^{2k+1}-(-i)^{2k+1}]}=$

$=\frac{(-1)^n\pi^{2n}(2k+1)^{2n}}{2^{2n+1}(-1)^k i}$, k=0,1,2,…; quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}}{e^z+e^{-z}}dz=2\pi i\sum_{k\geq 0}R(b)=\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{2^{2n}}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)^{2n}\qquad\text{(B4.3)}$$

Riprendendo la (6.13), abbiamo:

$$2\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)^{2n}=E_{2n},$$

e quindi:
$$\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{2n}}{e^z+e^{-z}}dz=\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}}E_{2n},\qquad\text{(B4.4)}$$

da cui $E_{2n}=(-1)^n(\frac{2}{\pi})^{2n+1}\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}$ (c.v.d.)

4.2) **Potevamo ricavare** il 2° membro della (B4.4) direttamente dal 1° membro della stessa (B4.4), in modo molto più semplice ed elegante, utilizzando il **metodo del limite e derivata**.

Infatti,
$$\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon^{(2n)}\int_0^\infty\frac{x^\varepsilon}{1+x^2}dx=$$

$$=(x=\sqrt{y})=\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon^{(2n)}\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{y^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}-1}}{1+y}dx=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon^{(2n)}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi\frac{\varepsilon+1}{2})}=\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon^{(2n)}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh(i\pi\frac{\varepsilon}{2})}$$

Ricordando che $\frac{1}{\cosh(i\pi\frac{\varepsilon}{2})}=\sum_{k\geq 0}E_k\frac{(i\pi\frac{\varepsilon}{2})^k}{k!}$, ricaviamo:

$$\int_0^\infty(\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon^{(2n)}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh(i\pi\frac{\varepsilon}{2})}=E_{2n}(-1)^n(\frac{\pi}{2})^{2n+1}\text{, da cui}$$

$$E_{2n}=(-1)^n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_0^\infty (\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x^2}\ ,\quad \text{c.v.d.}$$

5.0) Calcolo e sviluppo dell'integrale L = $\int_0^\infty \frac{z^2}{(\sinh\frac{z}{2})^2}\frac{dz}{\pi^2+z^2}$

Applicando il 2° teorema integrale di Cauchy alla stessa curva c, di cui al punto 2) dell'Appendice B, **(fig. 1),** ricaviamo:

$$\text{L}=\int_0^\infty \frac{z^2}{(\sinh\frac{z}{2})^2}\frac{dz}{\pi^2+z^2}\ =\ -2\int_0^\infty z^2\frac{1}{\pi^2+z^2}d\coth\frac{z}{2}\ =$$

$$=-2\left[\frac{z^2}{\pi^2+z^2}\coth\frac{z}{2}-\int(\coth\frac{z}{2})\frac{2\pi^2 z}{(\pi^2+z^2)^2}dz\right]_0^\infty=-2+2\pi^2\int_{-\infty}^\infty\frac{e^z+1}{e^z-1}\frac{zdz}{(\pi^2+z^2)^2}\qquad\text{(B5.0)}$$

Calcoliamo l'integrale $\quad \text{L1}=\int_{-\infty}^\infty\frac{e^z+1}{e^z-1}\frac{zdz}{(\pi^2+z^2)^2}$

La funzione integranda di L1 presenta un polo di 2° ordine nel punto $z_1=i\pi=a$, ed infiniti punti isolati nei punti $z_k=2\pi ik=b$, (k=1, 2, 3, …). Pertanto applicando la (B2.5), abbiamo:

$$\text{R(a)}=\lim_{z\to a}\left[\frac{(z-a)^2}{(z-a)^2(z+a)^2}\frac{z(e^z+1)}{e^z-1}\right]'=\lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z+a)^2}\frac{z(e^z+1)}{e^z-1}\right]'=$$

$$=\quad\lim_{z\to a}\left[\frac{e^z+1}{(z+a)^2}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)'+\frac{z}{e^z-1}\frac{(z+a)e^z-2(e^z+1)}{(z+a)^3}\right]=\frac{1}{8a}=\frac{1}{8\pi i}$$

Quindi: $\qquad 2\pi iR(a)=\frac{1}{4}$

$$\text{R(b)}=\lim_{z\to b}\frac{z-b}{e^z-1}\frac{z(e^z+1)}{(\pi^2+z^2)^2}\ =\ \lim_{z\to b}\frac{1}{e^z}\frac{z(e^z+1)}{(\pi^2+z^2)^2}=\frac{4\pi ik}{\pi^4(1-4k^2)^2}\ ;$$

$$2\pi i\sum_{k\geq1}R(b)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geq1}\left[\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right]\frac{k}{8k}=-\frac{1}{\pi^2},\qquad\text{per cui}\qquad \text{L1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}$$

In definitiva, dalla (B5.0) abbiamo: $\text{L}=\int_0^\infty\frac{z^2}{(\sinh\frac{z}{2})^2}\frac{dz}{\pi^2+z^2}\ =-2+2\pi^2(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2})=\frac{\pi^2}{2}-4$

5.1) Calcolo e sviluppo dell'integrale M = $\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$

Operando abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}}\ =\ \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}d\sqrt{1+4x}\ =\frac{1}{2}\left[e^{-x}\sqrt{1+4x}-\int\sqrt{1+4x}e^{-x}(-dx)\right]_0^\infty\ =$$

$$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+4x}dx\qquad\text{(B5.1)}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+4x}dx = (1+4x = y, \text{ da cui } x=\frac{y-1}{4}) = \frac{1}{4}\int_1^\infty \sqrt{y}e^{-\frac{y-1}{4}}dy =$$

$$=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\int_1^\infty \sqrt{y}e^{-\frac{y}{4}}dy = (y=4t) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^\infty 2\sqrt{t}e^{-t}4dt = 2e^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt =$$

$$= 2e^{\frac{1}{4}}[\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt - \int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}e^{-t}dt] = 2e^{\frac{1}{4}}[\Gamma(\frac{3}{2}) - \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{\frac{1}{4}} t^k\sqrt{t}dt] =$$

$$=2e^{\frac{1}{4}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{4^{-(k+\frac{3}{2})}}{k+\frac{3}{2}}] = 2e^{\frac{1}{4}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3}] \qquad \text{(B5.2)}$$

Sostituendo il risultato della (B5.2), nella (B5.1), otteniamo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}} = -\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{4}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3}] \qquad \text{(c.v.d.)}$$

Il valore numerico dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$ è uguale a 0,545641.

6.0) Calcolo e sviluppo dell'integrale T = $\int_0^\infty e^{-z}[1-\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)}]dz$

$$T = \int_0^\infty e^{-z}dx - \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2}\frac{z\sin z}{(1-\cos z)}dz = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2}\frac{z\sin z}{(1-\cos z)}dz \qquad \text{(B6.1)}$$

Ora, $\frac{\sin z}{1-\cos z} = \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2(\sin\frac{z}{2})^2} = \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = i\frac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1} = i(1+\frac{2}{e^{iz}-1}) = i + 2ie^{-iz}\sum_{k\ge 0}e^{-ikz}$

Sostituendo nell'integrale dell'ultimo membro della (B6.1), otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2}\frac{z\sin z}{(1-\cos z)}dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{2}\left[i+2i\sum_{k\ge 0}e^{-iz(1+k)}\right]dz = \frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 0}\int_0^\infty ze^{-z(1+i+ik)}dz =$$

$$=\frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 0'}\frac{1}{[1+i(1+k)]^2} = \frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 1'}\frac{1}{[1+ik]^2} = \frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 1'}\frac{(1-ik)^2}{(1+k^2)^2} = \frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 1'}\frac{1-k^2-2ik}{(1+k^2)^2} =$$

$$=\frac{i}{2} + i\sum_{k\ge 1'}\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2} + \sum_{k\ge 1'}\frac{2k}{(1+k^2)^2} \qquad \text{(B6.2)}$$

Poiché il 1° membro della (B6.1) è reale, dobbiamo considerare solo la parte reale del 2° membro della (B6.2); cioè:

$$2\sum_{k\ge 1'}\frac{k}{(1+k^2)^2} = 0{,}794234$$

In definitiva , abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-z}[1-\frac{z\sin z}{2(1-\cos z)}]dz = 1 - 2\sum_{k\ge 1'}\frac{k}{(1+k^2)^2} = 0{,}205766, \text{ e quindi:}$$

dalla (5.08) otteniamo: $\sum_{k\ge 1}\left[|B_{4k}| + B_{4k-2}\right] = 1 - 2\sum_{k\ge 1'}\frac{k}{(1+k^2)^2} = 0{,}205766$

6.1) Dimostriamo ora che

$$\int_0^\infty ze^{-z(1+ik)}dz = \frac{1}{(1+ik)^2} = \frac{e^{-2i\arctan(k)}}{1+k^2} \qquad \text{(B6.3)}$$

Utilizzando il 1° teorema integrale di Cauchy, calcoliamo l'integrale $\int_0^{\infty} ze^{-pz}dz$, (p>0).

Utilizziamo una curva semplice e chiusa c, costituita dal contorno di un settore circolare, (il cui centro coincide con l'origine degli assi coordinati), avente un raggio ρ giacente sul semiasse positivo delle ascisse, e l'altro raggio, giacente nel 1° quadrante, che forma un angolo θ col semiasse positivo delle ascisse,(**fig. 3**). Otteniamo quindi:

$$\int_0^{\rho} xe^{-px}dx + \int_0^{\theta} \rho e^{i\phi} e^{-p\rho e^{i\phi}} \rho e^{i\phi} id\phi + \int_{\rho}^{0} te^{i\theta} e^{-pte^{i\theta}} e^{i\theta} dt = 0 \qquad \text{(B6.4)}$$

Nella (B6.4) abbiamo indicato con ϕ un angolo compreso tra 0 e θ.

Passando al limite per $\rho \to \infty$, il 2° integrale della (B6.4) si annulla, per cui dalla (B6.4) ricaviamo:

$$e^{-2i\theta} \int_0^{\infty} xe^{-px}dx = \int_0^{\infty} te^{-pte^{i\theta}} dt \text{ , da cui } \int_0^{\infty} te^{-pt(\cos\theta + i\sin\theta)}dt = \frac{e^{-2i\theta}}{p^2}$$

Ponendo $p = \sqrt{1+k^2}$, e θ=arctan(k), ritroviamo il risultato della (B6.3)

7) Procedimento per il calcolo di $\Gamma^{(k)}(1)$

$$\Gamma^{(k)}(1) = \lim_{z \to 1} [\Gamma(z)\Psi(z)]^{(k-1)} = \lim_{z \to 1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(z)\Psi^{(k-1-j)}(z)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)\Psi^{(k-1-j)}(1) \text{ , (k>0)} \qquad \text{(B7.1)}$$

essendo $$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - 1}{t-1} dt - \gamma , \qquad \text{(B7.2)}$$

Derivando, n volte, rispetto a z, la (B7.2), ricaviamo:

$$\Psi^{(n)}(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}(\ln t)^n}{t-1} dt = -\sum_{h \ge 0} \int_0^1 t^{h+z-1} (\ln t)^n dt = (t = e^{-u}) =$$

$$= -\sum_{h \ge 0} \int_0^{\infty} e^{-u(h+z-1)} (-u)^n e^{-u} du = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \ge 0} \frac{1}{(h+z)^{n+1}} \qquad \text{(B7.3)}$$

Ponendo, nella (B7.3), z=1, otteniamo:

$$\Psi^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \ge 0} \frac{1}{(h+1)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \ge 1} \frac{1}{(h)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \zeta(n+1) \text{ ,(n>0)} \qquad \text{(B7.4)}$$

Per n=0, dalla (B7.2) abbiamo: $$\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \qquad \text{(B7.5)}$$

Per n=1, dalla (B7.4) ricaviamo: $\Psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$

Per j=k-1, tenendo presente la (B7.5), dalla (B7.1) ricaviamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)\Psi^{(k-1-j)}(1) + \Gamma^{(k-1)}(1)(-\gamma)$$

Tenendo presente la (B7.4), troviamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)(-1)^{k-j}(k-j-1)!\zeta(k-j) + \Gamma^{(k-1)}(1)(-\gamma) \text{ , (k>1),} \qquad \text{(B7.6)}$$

Ponendo, nella (B7.6), successivamente, k = 2, 3, …,k, possiamo ricavare k-1

equazioni, nelle incognite $\Gamma''(1), \Gamma'''(1), ..., \Gamma^{(k)}(1)$. Supposti noti i valori di $\zeta(k-j)$, j= 0, 1, 2, 3, …,k-2, possiamo, facilmente, ricavare $\Gamma''(1)$ dalla prima equazione, e sostituirla nella seconda; successivamente, ricaviamo $\Gamma'''(1)$ e la sostituiamo nella terza; e, così di seguito, fino ad arrivare a calcolare $\Gamma^{(k)}(1)$ in funzione di termini noti.
Oppure, una volta ricavate le k-1 equazioni come sopra definite, è possibile calcolare $\Gamma^{(k)}(1)$ attraverso il metodo di Cramer (Gabriel **Cramer,** nato a Ginevra il 31.07.1704, morto a Bagnols-sur Cèze il 4.01.1752).
Con lo stesso metodo è possibile calcolare anche $\Gamma^{(k)}(\frac{1}{2})$; infatti, ponendo nella (B7.3), $z = \frac{1}{2}$, ricaviamo:

$$\Psi^{(n)}(\frac{1}{2}) = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(h+\frac{1}{2})^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{2^{n+1}}{(2h+1)^{n+1}} =$$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n+1} n! \left[\sum_{h \geq 1} \frac{1}{(2h)^{n+1}} + \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(2h+1)^{n+1}} - \sum_{h \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(h)^{n+1}} \right] =$$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n+1} n! \left[\sum_{h \geq 1} \frac{1}{(h)^{n+1}} - \sum_{h \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(h)^{n+1}} \right] = (-1)^{n-1} n! (2^{n+1} - 1) \zeta(n+1)$$

8) Calcolo e sviluppo dell'integrale S= $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z^2}$

Per il calcolo dell'integrale S utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy,
e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B, (**vedasi Fig.1**)
La funzione integranda di S presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, k=0, 1, 2, …;
inoltre presenta un polo nel punto z=i.
Operando, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\pi} \frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{1+(\rho e^{i\theta})^2} = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} \frac{e^{qz}}{1+e^z} +$$

$$+ 2\pi i \lim_{z \to z_k} \sum_{k \geq 0} \frac{z-z_k}{1+e^z} \frac{e^{qz}}{1+z^2} = \pi \frac{e^{qi}}{1+e^i} + 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} \frac{e^{qi\pi(2k+1)}}{1+[i\pi(2k+1]^2} = \text{A(q)+iB(q)}$$

essendo $\text{A(q)} = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^2 (2k+1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos(\frac{1}{2} - q)}{\cos(\frac{1}{2})}$

$$\text{B(q)} = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)]}{\pi^2 (2k+1)^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\frac{1}{2} - q)}{\cos(\frac{1}{2})}$$

Per q = $\frac{1}{2}$, abbiamo: $A(\frac{1}{2}) = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos(\frac{1}{2})}$

$$B(\frac{1}{2}) = 0$$

9) Calcolo e sviluppo dell'integrale U = $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z}$

Per il calcolo dell'integrale U utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy,
e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B,
(vedasi Fig.2)
La funzione integranda di U presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, k=0, 1, 2, …;
operando, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} + \int_{-1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{1+\rho e^{i\theta}} +$$

$$+ \int_{\pi}^{0} \frac{e^{q(-1+\varepsilon e^{i\theta})}}{1+e^{-1+\varepsilon e^{i\theta}}} \frac{\varepsilon e^{i\theta} i d\theta}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})} = 2\pi i \lim_{z \to z_k} \sum_{k\geq 0} \frac{z-z_k}{1+e^z} \frac{e^{qz}}{1+z} =$$

$$= 2\pi i \sum_{k\geq 0} \frac{1}{-1} \frac{e^{i\pi(2k+1)}}{1+i\pi(2k+1)} \qquad \text{(B9.1)}$$

Per $\rho \to \infty$, e per $\varepsilon \to 0$, il 3° integrale del 1° membro della (B9.1) è nullo,
e dalla (B9.1), ricaviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} = 2\pi i \sum_{k\geq 0} \frac{1}{-1} \frac{e^{i\pi(2k+1)}}{1+i\pi(2k+1)} + i\pi \frac{e^{-q}}{1+e^{-1}} =$$

$$= 2\pi i \sum_{k\geq 0} \frac{1}{-1} \frac{[1-i\pi(2k+1)][\cos \pi q(2k+1) + i \sin \pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{1-q}}{1+e} =$$

$$= 2\pi \sum_{k\geq 0} \frac{1}{1} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1)\cos[\pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} +$$

$$+ 2\pi i \sum_{k\geq 0} \frac{1}{-1} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1)\sin[\pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{1-q}}{1+e} \qquad \text{(B9.2)}$$

Per q=$\frac{1}{2}$, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} = 2\pi \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{1+\pi^2(2k+1)^2} - 2\pi i \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{\pi(2k+1)}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1+e} \qquad \text{(B9.3)}$$

10) Calcolo e sviluppo dell'integrale V = $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2}$

Per il calcolo dell'integrale V utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy,
e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B,
(vedasi Fig.2).
La funzione integranda di V presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, k=0, 1, 2, …;
inoltre presenta un polo nel punto z=i.
Operando, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{-1-\varepsilon}\frac{e^{qx}}{1+e^{x}}\frac{1}{1+x}\frac{dx}{1+x^{2}}+\int_{-1+\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{qx}}{1+e^{x}}\frac{1}{1+x}\frac{dx}{1+x^{2}}+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}}\frac{1}{1+\rho e^{i\theta}}\frac{\rho e^{i\theta}id\theta}{1+(\rho e^{i\theta})^{2}}+$$

$$+\int_{\pi}^{0}\frac{e^{q(-1+\varepsilon e^{i\theta})}}{1+e^{-1+\varepsilon e^{i\theta}}}\frac{1}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})}\frac{\varepsilon e^{i\theta}id\theta}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})^{2}}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to z_k}\sum_{k\geq 0}\frac{z-z_k}{1+e^{z}}\frac{1}{1+z}\frac{e^{qz}}{1+z^{2}}+2\pi i\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}\frac{e^{qz}}{1+e^{z}}\frac{1}{1+z}=$$

$$=2\pi i\sum_{k\geq 0}\frac{1}{-1}\frac{1}{1+i\pi(2k+1)}\frac{e^{qi\pi(2k+1)}}{1-\pi^{2}(2k+1)^{2}}+\pi\frac{e^{qi}}{1+e^{i}}\frac{1}{1+i} \qquad \text{(B10.1)}$$

Passando al limite per $\rho\to\infty$, e per $\varepsilon\to 0$, il 3° integrale del 1° membro della (B10.1) è nullo, e quindi dalla precedente relazione (B10.1) otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{qx}}{1+e^{x}}\frac{1}{1+x}\frac{dx}{1+x^{2}} = 2\pi i\sum_{k\geq 0}\frac{1-i\pi(2k+1)}{1+\pi^{2}(2k+1)^{2}}\frac{\cos[q\pi(2k+1)]+i\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^{2}(2k+1)^{2}-1}+$$

$$+\pi\frac{\cos q+i\sin q}{1+\cos 1+i\sin 1}\frac{1-i}{2}+\frac{i\pi}{2}\frac{e^{-q}}{1+e^{-1}} = \text{S(q)+iT(q), dove}$$

$$\text{S(q)} = -2\pi\sum_{k\geq 0}\frac{\sin[\pi q(2k+1)]-\pi(2k+1)\cos[\pi q(2k+1)]}{\pi^{4}(2k+1)^{4}-1}+\frac{\pi}{4}\frac{\cos(\frac{1}{2}-q)-\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})}; \qquad \text{(B10.2)}$$

$$\text{T(q)} = 2\pi\sum_{k\geq 0}\frac{\cos[\pi q(2k+1)]+\pi(2k+1)\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^{4}(2k+1)^{4}-1}-\frac{\pi}{4}\frac{\cos(\frac{1}{2}-q)+\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{e^{1-q}}{1+e}. \qquad \text{(B10.3)}$$

Per q=$\frac{1}{2}$, dalle due relazioni precedenti ricaviamo:

$$S(\tfrac{1}{2}) = -2\pi\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k}}{\pi^{4}(2k+1)^{4}-1}+\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cos(\frac{1}{2})} \qquad \text{(B10.4)}$$

$$T(\tfrac{1}{2}) = 2\pi\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k}\pi(2k+1)}{\pi^{4}(2k+1)^{4}-1}-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\cos(\frac{1}{2})}+\frac{\pi}{4\cosh(\frac{1}{2})} \qquad \text{(B10.5)}$$

Rifermenti

[1] G. H. Hardy – DIVERGENT SERIES
MacMillan And Co. – London 1949

[2] T. J. I'A. Bromwich
AN INTRODUCTION
To the theory of INFINITE SERIES
Clarendon Press - Oxford 1949

[3] Konrad Knopp

THEORY AND APPLICATION
OF INFINITE SERIES
Blackie and Son Limited
London and Glasgow, 1954

[4] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik

Table of Integrals, Series, And Products
Academic Press, Inc., 1980

[5] Ernst Lindelöf

Le CALCUL DES RÉSIDUS et ses applications
a la Théorie des Fonctions
Chelsea Publishing Company
New York 1947

[6] Émile Borel

Leçons sur les séries divergentes
Deuxième ed. Parigi 1928

[7] Le Roy: Sur les séries divergentes
Annales de la Fac. des sciences de Toulouse
Vol. 2, pag. 317 – 430, 1900

[8] Christiane Rousseau

Divergent Séries: past, present, future…
Montréal (Qué), H3C 317,
Canada, March 2004

[9] A.Ghizzetti-L. Marchetti-A.Ossicini

Lezioni di Complementi di Matematica
Università degli studi di Roma- 1972

[10] Louis Comtet

ADVANCED COMBINATORICS
The Art of Finite and Infinite Expansion
D. Reidel Publishing Company
Dordrecht-Boston 1974

[11] John Conway-Richard K. Guy

IL LIBRO DEI NUMERI
Ulrico Hoepli Editore, Milano 1999

[12] Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH,
Oren PATASHNIK

MATEMATICA DISCRETA
(Principi matematici per l'informatica)
Ulrico Hoepli Editore, Milano 1996

[13] Jean-Pierre Ramis

Séries Divergentes et Théories Asymptotiques
Institut de Recherche Mathématique avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg,1991
PANORAMAS ET SYNTHÉSES (SMF) 1994

[14] E. Maillet

Sur les séries divergentes
et les equations différentielles
Ann. Ec. Norm. Sup. Paris (1903), p. 487-518

[15] B. Malgrange "Sommation des séries divergentes"
Exp. Math. 13 (1995) – 163-222

Il dott.ing.Pasquale Cutolo, Commendatore della Repubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Elettrotecnica presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni (ora Istituto Superiore delle Comunicazioni e delle Tecnologie dell'Informazione). Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazione. Membro di Commissioni di Concorsi per Ingegneri. Ha insegnato matematica nei corsi di qualificazione per dipendenti.

p.cutolo@inwind.it