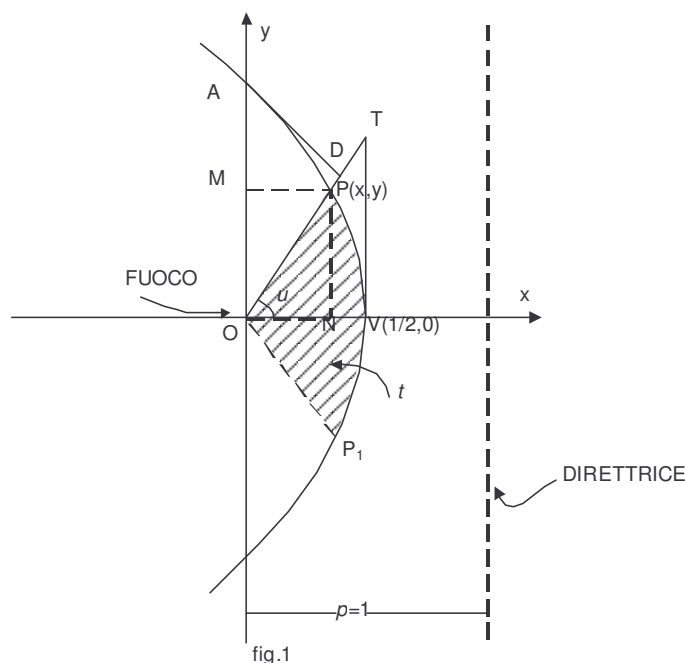


**BREVE SINTESI DELLA TRIGONOMETRIA DELLA PARABOLA**  
**(www.maecla.it)**  
**Carolla Guido<sup>1</sup>**

*Sunto.* Facendo riferimento all'articolo "Una formula trigonometrica di Guido Carolla", pubblicato di recente, attraverso [didattica@maecla.it](mailto:didattica@maecla.it), su [www.maecla.it](http://www.maecla.it), si riporta in anteprima un estratto-sintesi dell'argomento con le funzioni paraboliche dipendenti dalle circolari ed indipendenti da queste. Seguono i risultati finali delle derivate e degli integrali delle stesse funzioni paraboliche ed un listato Qbasic, che permette di trovare le funzioni paraboliche di ogni argomento, sia esso l'angolo  $u$  in gradi sessagesimali, in radianti, o in relazione all'area  $t$ , e infine alcuni esempi in output.

*Abstract.* In this short paper, readers will be given the opportunity to explore the cases when parabolic functions and circular functions are dependent and independent as already expressed in the article "A trigonometric formula by Guido Carolla" recently published on [www.maecla.it](http://www.maecla.it). Topics include also the calculation of derivatives and integrals of parabolic functions and a QBasic code (and examples of its application) which solves any parabolic function having as argument the  $u$  angle in radians or in sexagesimal degrees, or the  $t$  area.

1. Le funzioni paraboliche (v. fig.1) relative all'angolo  $u$  possono intendersi riferite indifferentemente anche all'area  $t$  che è il doppio di quella del settore parabolico relativo ad  $u$ : infatti, proprio l'argomento  $t$  ha permesso che dette funzioni possano essere indipendenti da quelle circolari.



<sup>1</sup> Docente di Matematica e Preside a r. Piazza Mazzini 24 LECCE. E-mail: [guidocarolla@libero.it](mailto:guidocarolla@libero.it)

La parabola presa in considerazione è  $2px+y^2=p^2$  e per  $p=1$  si ha la trigonometrica che è  $2x+y^2=1$ . Il raggio vettore e le varie funzioni paraboliche si definiscono come seguono:

$$OP/p = \rho(u) \text{ (raggio vettore)} ; PN/p = \sin p u ; ON/p = \cos p u ; VT/p = \tan p u ; AD/p = \cot p u ;$$

$$OT/p = \sec p u ; OD/p = \csc p u .$$

Pertanto, dopo averne specificato la collocazione sulla parabola trigonometrica, si riportano in riepilogo il raggio vettore, le funzioni paraboliche dipendenti dalle circolari e quelle indipendenti da quest'ultime:

$$\rho(u) = \frac{1}{1 + \cos u} ;$$

$$\sin p u = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} ; \cos p u = \frac{\cos u}{1 + \cos u} ; \tan p u = \frac{\tan u}{2} ;$$

$$\cot p u = \frac{\sqrt{2} \cdot \cot u}{1 + \cot u} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos u}{\sin u + \cos u} ; \sec p u = \frac{\sec u}{2} ;$$

$$\csc p u = \frac{\csc u}{1 + \cot u} = \frac{1}{\sin u + \cos u} = \frac{\csc u}{1 \pm \sqrt{\csc^2 u - 1}}, \text{ con } \begin{cases} + \text{ se } u \text{ è nel quadrante I o III} \\ - \text{ se } u \text{ è nel quadrante II o IV} \end{cases} .$$

$$\rho(t) = 1 - \cos p t = \frac{1}{2}(1 + \sin p^2 t);$$

$$\sin p t = \sqrt[3]{3t + \sqrt{9t^2 + 1}} + \sqrt[3]{3t - \sqrt{9t^2 + 1}} ;$$

$$\cos p t = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \sqrt[3]{3t + \sqrt{9t^2 + 1}} + \sqrt[3]{3t - \sqrt{9t^2 + 1}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}(1 - \sin p^2 t);$$

$$\tan p t = \frac{\sin p t}{2 \cos p t} ; \cot p t = \frac{\sqrt{2} \cos p t}{\sin p t + \cos p t} ;$$

$$\sec p t = \frac{1 - \cos p t}{2 \cos p t} ; \csc p t = \frac{1 - \cos p t}{\sin p t + \cos p t} .$$

2. Si riportano a seguire i notevoli valori delle derivate e degli integrali del raggio vettore e delle funzioni paraboliche:

$$\frac{d \rho(u)}{du} = \rho(u) \sin p u ;$$

$$\frac{d \sin p u}{du} = 1 - \cos p u = \rho(u) ;$$

$$\frac{d \cos p u}{du} = -\rho(u) \sin p u ;$$

$$\frac{d \tan p u}{du} = \frac{\rho^2(u)}{2 \cos p^2 u} ;$$

$$\frac{d \cotp u}{d u} = -\frac{\rho^2(u) \sqrt{2}}{(\sinp u + \cosp u)^2} ;$$

$$\frac{d \secp u}{d u} = \frac{\rho(u) \tanp u}{\cosp u} ;$$

$$\frac{d \cscp u}{d u} = \frac{\rho(u)(\sinp u - \cosp u)}{(\sinp u + \cosp u)^2} ;$$

nei seguenti valori integrali si sottintenda "+c":

$$\int \rho(u) du = \sinp u ; \quad \int \sinp u \, du = \ln|1 - \cosp u| = \ln|\rho(u)| ; \quad \int \cosp u \, du = u - \sinp u ;$$

$$\int \tanp u \, du = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{1 - \cosp u}{\cosp u} \right| \right] ;$$

$$\int \cotp u \, du = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left[ u + \ln \left| \frac{\sinp u + \cosp u}{1 - \cosp u} \right| \right] ;$$

$$\int \secp u \, du = \frac{1}{2} \ln \left| 2 \tanp \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{2} \ln |2(\secp u + \tanp u)| ;$$

$$\int \cscp u \, du = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sinp u + \sqrt{2} - 1}{-\sinp u + \sqrt{2} + 1} \right|.$$

3. Infine, si presenta un listato di programma in QBASIC di facile comprensione, che comunque permette di trovare i valori di tutte le funzioni paraboliche di ogni argomento:

```
CLS : PRINT "VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T), (U) ed (s) "
PRINT "ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U), "
REM QUEST'ULTIMO IN RADIANTI, PER CUI E'U(T)=ATN(SINP(T)/COSP(T)) E
REM T(U)=SINP(U)/2*(1+SINP(U)^2/3);IL RAGGIO VETTORE R(U)=1/(1+COS(U)) ED IL
REM PARAMETRO P=1(distanza direttrice fuoco,nel quale è l'origine degli assi)
REM (come il raggio=1 nel cerchio trigon.co). L'EQUAZ. PARABOLA E' Y^2+2*X=1.
REM L'INFINITESIMO +1D-37 E'POSTO COME UN ARTIFICIO CHE PERMETTE LE DIVISIONI
REM PER VALORI CHE TENDONO A ZERO:NELL'OUTPUT GLI INFINITESIMI VANNO LETTI ZERO.
REM MENTRE I NUMERI IN NOTAZIONE ESPONENZIALE
REM DEL TIPO 1E+37 VANNO LETTI INFINITO.SE VUOI INTRODURRE T=2/3 DIGITA
REM .66666666667(punto,nove volte 6,un 7) E MODIFICA LE ISTRUZIONI 140,150,
REM 350,PER T=-2/3 ANCHE LA 320, SOMMANDO AI DENOMINATORI 1D-37.
REM PER T=INFINITO DIGITA 1E+37.
REM v.CAROLLA G.,2001 "FUNZIONI PARABOLICHE",in Atti Congresso Naz.le MATHESIS
REM di Barletta,17,18,19 OTTOBRE 2000.
P = 1
PRINT "Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi"
PRINT "sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di"
INPUT "(T) e di (U) in radianti digita 2"; Z
IF Z = 1 THEN 400 ELSE 100
100 INPUT "T="; T
IF T = 0 OR T = .66666666667# OR T = 1E+37 THEN 120 ELSE 130
120 A0 = SQR(9 * T ^ 2 + P ^ 4)
A = 3 * P * T + P * A0
C = 3 * P * T - P * A0
A1 = SGN(A) * (SGN(A) * A) ^ (1 / 3)
C1 = SGN(C) * (SGN(C) * C) ^ (1 / 3)
SINP = A1 + C1 + 1D-37
```

```

PRINT
COSP = (1 - SINP ^ 2) / 2 + 1D-37
GOTO 140
130 A0 = SQR(9 * T ^ 2 + P ^ 4)
A = 3 * P * T + P * A0
C = 3 * P * T - P * A0
A1 = SGN(A) * (SGN(A) * A) ^ (1 / 3)
C1 = SGN(C) * (SGN(C) * C) ^ (1 / 3)
SINP = A1 + C1
PRINT
COSP = (1 - SINP ^ 2) / 2
140 TANP = SINP / (2 * COSP)
COTP = (SQR(2) * COSP) / (SINP + COSP)
SECP = (1 - COSP) / (2 * COSP)
150 CSCP = (1 - COSP) / (SINP + COSP)
E = -2 / 3 * P ^ 2
F = 2 / 3 * P ^ 2
IF T >= 0 THEN 350
IF T < 0 THEN 320
IF T > E THEN 350
IF T < F THEN 350
320 i = SINP / COSP
u = ATN(i) - (SGN(i) + 1) * ATN(1) * 2
GOTO 370
350 L = SINP / COSP
u = ATN(L) - (SGN(L) - 1) * ATN(1) * 2
370 PRINT "U="; u
PRINT
PRINT "GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (T) E (U)"
PRINT "SINP "; T; "="; "SINP "; u; "="; SINP; "="; (1 - COS(u)) / SIN(u); "=";
SIN(u) / (1 + COS(u))
PRINT
PRINT "COSP "; T; "="; "COSP "; u; "="; COSP; "="; COS(u) / (1 + COS(u))
PRINT
PRINT "TANP "; T; "="; "TANP "; u; "="; TANP; "="; TAN(u) / 2
PRINT
PRINT "COTP "; T; "="; "COTP "; u; "="; COTP; "="; SQR(2) * COS(u) / (SIN(u) +
COS(u))
PRINT
PRINT "SECP "; T; "="; "SECP "; u; "="; SECP; "="; 1 / (2 * COS(u))
PRINT
PRINT "CSCP "; T; "="; "CSCP "; u; "="; CSCP; "="; 1 / (SIN(u) + COS(u))
END
400 REM LE FUNZIONI PARABOLICHE DI (s) IN GRADI SESSAG.E IN (U) IN RADIANTI
INPUT "s"; s
IF s <= 180 THEN 410 ELSE 405
405 u = ATN(1) * 4 * s / 180 - ATN(1) * 8: GOTO 420
410 u = ATN(1) * 4 * s / 180
420 PRINT "GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (s) GR. SESSAG. E
(U) RAD."
PRINT "SINP "; s; "="; "SINP "; u; "="; (1 - COS(u)) / SIN(u); "="; SIN(u) / (1
+ COS(u))
PRINT
PRINT "COSP "; s; "="; "COSP "; u; "="; COS(u) / (1 + COS(u))
PRINT
PRINT "TANP "; s; "="; "TANP "; u; "="; TAN(u) / 2; ""
PRINT
PRINT "COTP "; s; "="; "COTP "; u; "="; SQR(2) * COS(u) / (SIN(u) + COS(u))
PRINT
PRINT "SECP "; s; "="; "SECP "; u; "="; 1 / (2 * COS(u))
PRINT
PRINT "CSCP "; s; "="; "CSCP "; u; "="; 1 / (SIN(u) + COS(u))
END

```

4. Seguono alcuni esempi in output che permettono di capire facilmente come si può usare il programma. Si noti che i risultati che si ottengono con l'opzione 1 sono ripetuti due volte per il "sinp", con l'opzione 2 essi sono ripetuti due volte e per il "sinp" tre volte, perché calcolati con le formule equivalenti di cui al § 1, che si evincono da un accurato esame del listato; inoltre gli esempi b), c) e d), e), in coppia, si riferiscono al medesimo argomento espresso rispettivamente in  $t$  e in  $s$ , cioè con il doppio dell'area del settore parabolico sotteso dall'angolo  $u$  e con i gradi sessagesimali di quest'ultimo, poi però trasformati in radianti; questi ultimi sono presi negativi se i relativi angoli sono delimitati nel II e IV quadrante:

a) VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T),(U) ed (s)  
 ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U),

Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi  
 sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di  
 (T) e di (U) in radianti digita 2? 1  
 s? 35

GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (s) GR. SESSAG. E (U)  
 RAD.

$$\text{SINP } 35 = \text{SINP } .6108652 = .3152988 = .3152988$$

$$\text{COSP } 35 = \text{COSP } .6108652 = .4502933$$

$$\text{TANP } 35 = \text{TANP } .6108652 = .3501038$$

$$\text{COTP } 35 = \text{COTP } .6108652 = .8317888$$

$$\text{SECP } 35 = \text{SECP } .6108652 = .6103873$$

$$\text{CSCP } 35 = \text{CSCP } .6108652 = .718015$$

b) VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T),(U) ed (s)  
 ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U),

Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi  
 sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di  
 (T) e di (U) in radianti digita 2? 2  
 T=? -1.732050808

$$T = -1.732050808$$

$$U = -2.094395$$

GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (T) E (U)

$$\text{SINP } -1.732051 = \text{SINP } -2.094395 = -1.732051 = -1.732051 = -1.732051$$

$$\text{COSP } -1.732051 = \text{COSP } -2.094395 = -.9999999 = -1$$

$$\text{TANP } -1.732051 = \text{TANP } -2.094395 = .8660254 = .8660253$$

$$\text{COTP } -1.732051 = \text{COTP } -2.094395 = .5176381 = .5176381$$

$$\text{SECP } -1.732051 = \text{SECP } -2.094395 = -1 = -.9999999$$

$$\text{CSCP } -1.732051 = \text{CSCP } -2.094395 = -.7320508 = -.7320508$$

$$\text{Si noti che } u = -2.094395 = -\frac{2}{3}\pi$$

c) VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T),(U) ed (s)  
ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U),

Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi  
sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di  
(T) e di (U) in radianti digita 2? 1

s? 240

GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (s) GR. SESSAG. E (U)  
RAD.

$$\text{SINP } 240 = \text{SINP } -2.0943951 = -1.732051 = -1.732051$$

$$\text{COSP } 240 = \text{COSP } -2.0943951 = -.9999996$$

$$\text{TANP } 240 = \text{TANP } -2.0943951 = .8660256$$

$$\text{COTP } 240 = \text{COTP } -2.0943951 = .517638$$

$$\text{SECP } 240 = \text{SECP } -2.0943951 = -1$$

$$\text{CSCP } 240 = \text{CSCP } -2.0943951 = -.7320508$$

d) VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T),(U) ed (s)  
ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U),

Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi  
sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di  
(T) e di (U) in radianti digita 2? 2

$$T=? .1371809106$$

$$U= .5235987$$

GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (T) E (U)

$$\text{SINP } .1371809 = \text{SINP } .5235987 = .2679492 = .2679492 = .2679492$$

$$\text{COSP } .1371809 = \text{COSP } .5235987 = .4641016 = .4641016$$

$$\text{TANP } .1371809 = \text{TANP } .5235987 = .2886751 = .2886751$$

$$\text{COTP } .1371809 = \text{COTP } .5235987 = .8965755 = .8965755$$

$$\text{SECP } .1371809 = \text{SECP } .5235987 = .5773503 = .5773503$$

CSCP .1371809 =CSCP .5235987 = .7320508 = .7320508

e) VALORI DELLE FUNZIONI PARABOLICHE DI ARGOMENTI (T),(U) ed (s)  
ESSENDO: (T) IL DOPPIO DELL'AREA DEL SETTORE PARABOLICO DI AMPIEZZA (U),  
Se vuoi direttamente le funzioni paraboliche in funzione di (s) gradi  
sessagesimali digita 1, se vuoi i valori in funzione di  
(T) e di (U) in radianti digita 2? 1  
s? 30

GLI ARGOMENTI DELLE FUNZIONI SONO RISPETTIVAMENTE (s) GR. SESSAG. E (U)  
RAD.

SINP 30 =SINP .5235988 = .2679492 = .2679492

COSP 30 =COSP .5235988 = .4641016

TANP 30 =TANP .5235988 = .2886751

COTP 30 =COTP .5235988 = .8965755

SECP 30 =SECP .5235988 = .5773503

CSCP 30 =CSCP .5235988 = .7320508

## APPENDICE

Si riporta una nota informativa sul Qbasic:

Il *Basic* è stato per lungo tempo il linguaggio più usato dagli aspiranti programmatori, che, in virtù della sua notevole semplicità d'uso, se ne servivano facilmente per operare sui loro *home computer*.

L'avvento del *QBasic*, grazie all'accresciuta espressività e all'aumentata ricchezza di costrutti propri della nuova definizione del linguaggio *Basic*, ha permesso di ampliare notevolmente la rete degli utenti che ne fanno uso, sia in ambiente professionale per applicazioni *software*, sia in ambienti orientati alla formazione.

E' possibile scaricare *QBasic* dalla rete<sup>2</sup> ed iniziare subito a programmare, sia con l'ausilio della Guida *on line*<sup>3</sup>, sia mediante l'apporto più completo di manuali cartacei come quello pubblicato nel 1991 da David I. SCHNEIDER e Peter NORTON ed ora anche in traduzione italiana<sup>4</sup>, o quello pubblicato nel 1992 da R. ARNSON, Ch. GEMMELL, H. HENDERSON per la McGraw-Hill Libri Italia srl nella traduzione in italiano di Laura Saggini con il titolo *MS-DOS QBasic.Guida del programmatore* (pp.VIII-593, ISBN 88-386-0257-3).

Navigando *on line* è possibile incontrare siti in italiano che suggeriscono facili utilizzazioni di *QBasic*<sup>5</sup>.

---

<sup>2</sup> Per esempio da <http://www.qbasic.com/>  
<http://studio.lacab.roma.it/install/qbasic/>  
<http://web.tiscali.it/paranco/page4.html>  
<http://digilander.iol.it/ebram/download.htm> etc.

<sup>3</sup> Piccoli accorgimenti sono necessari nell'uso della tastiera per le combinazioni diverse delle funzioni dei tasti per Windows ME.

<sup>4</sup> *Programmare in QBasic*, JacksonLibri ed., pp.392, ISBN 8825604440. Molto utile è anche il più maneggevole (pp. 94) *Programmare in QBasic. Teoria ed esercizi svolti*, a cura di A. MACII-E. MACII-R. SCARSI, volume adottato presso il Politecnico di Torino come guida per le prove d'esame di programmazione dei vari corsi di Fondamenti di Informatica. Si veda anche STEPHEN TORY TOUPIN, *E' facile QBASIC*, Jackson Libri ed., pp. 192, ISBN 8825608179.

<sup>5</sup> Ved. ad esempio <http://digilander.iol.it/ebram/download.htm>

## BIBLIOGRAFIA

- A. AGOSTINI, "Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. Trigonometria piana e sferica", in *Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementari*, vol. II p. I, Milano 1937 (rist. an. 1957), pp. 540 sgg.;
- J. BOOTH, A Memoir on the trigonometry of the parabola, London 1856;
- M. CUGIANI, in *Enciclopedia della Scienza e della Tecnica*, vol. V, ed. it. Milano <sup>2</sup>1964, s. v. "Funzione";
- G. EGIDI, "Saggio intorno alle funzioni paraboliche.", Atti Acc. Nuovi Lincei 47, 1894, pp. 16-33;
- M. R. SPIEGEL, "Funzioni trigonometriche" e "Funzioni iperboliche", in *Manuale di Matematica*, ed. it. , Milano 1994.
- Carolla G., "Intorno alla trigonometria della parabola", lavoro presentato nel Convegno Nazionale di Matematica della Mathesis, Paestum (SA), 1983, pp.47.
- Carolla G., "Le funzioni paraboliche" in Atti del Congresso Nazionale Mathesis "Il ruolo della Matematica nella società contemporanea", 17/19 ottobre 2000, Editrice Rotas, Barletta (BA), 2001, pp. 97-112, pubblicato anche sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. La II parte "Intorno alla trigonometria della parabola" è in corso di pubblicazione sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it), nella sez. Approfondimenti: idee interessanti.
- Carolla G., "Programmi al computer sulle progressioni e medie" in linguaggio QBASIC, su CD in Atti del 4° Convegno ADT Monopoli (BA), 11/12/13 ottobre 2002, pubblicato nelle "Varie" su CD della 5ª edizione ADT (Associazione Didattica con le Tecnologie) e pubblicato anche col seguente articolo sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Didattica: note di didattica.
- Carolla G., "Nuovi spunti di didattica matematica e riflessioni per viver sani e più a lungo..." in linguaggio QBASIC, pubblicato nelle "Varie" su CD relativo al 5° Convegno Nazionale ADT "Il ruolo delle tecnologie nella didattica" tenutosi a Castel S. Pietro, 8 – 9 Novembre 2003, e pubblicato anche col n. 12 sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Didattica: note di didattica.

Per [www.maecla.it](http://www.maecla.it) 17 febbraio 2006.

---

<http://digilander.iol.it/vpisani/forum-scuola/qbasic/intro3-dove.html>

<http://utenti.tripod.it/LDM/basic.htm> . Ved. inoltre

<http://calvino.polito.it/~pier/qbasic/siti.html> .