# UNA NOTA SULL'USO DI INTEGRALI DI EULERO DIVERGENTI

(A note on the use of Euler's divergent integrals)

di Pasquale Cutolo

**Premesse**:
Vengono prese in esame numerose applicazioni pratiche per mostrare che gli integrali di Eulero di prima specie B(x,y) = $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ , e di seconda specie Γ(x) = $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$ si possono utilmente impiegare, per ottenere risultati concreti, anche quando sono divergenti, e cioè quando x ed y non soddisfano le condizioni di convergenza Re(x)>0 e Re(y)>0.
Re(z) rappresenta la parte reale del complesso z

**Abstract**
In this work the author examines several applications to show that Eulerian integrals of the first kind B(x,y) = $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ , and of the second kind Γ(x)= $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$ can be used , to obtain correct results, also when they are not convergent, i.e. when x and y do not satisfy the convergence conditions Re(x)>0 and Re(y)>0.
Re(z) denote the real part of the complex number z.

## 1.0.00. Intoduzione

E' noto che la funzione Gamma Γ(x) è definita per qualsiasi x complesso, ad eccezione dei valori interi non positivi, e che la funzione Beta B(x,y)= $\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ è definita per tutti i valori di x ed y per cui è definito il numeratore della funzione Beta. Le funzioni Beta e Gamma hanno due importanti rappresentazioni integrali, note, rispettivamente, come integrale euleriano di prima specie

a) $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (1)$$

e integrale euleriano di seconda specie

b) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad (2)$$

che sono valide quando gli integrali sono convergenti, e cioè quando sono verificate le condizioni

$$\mathrm{Re}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(y) > 0 \qquad (3)$$

dove Re(z) indica la parte reale del numero complesso z, e solo la prima condizione della (3) è necessaria per la (2).

Noi vogliamo mostrare, attraverso diverse e concrete applicazioni, che le espressioni (1) e (2) si possono utilmente impiegare, per ottenere risultati corretti, anche quando sono divergenti, e cioè quando x ed y non soddisfano le condizioni di convergenza (3).

Nelle applicazioni che seguono noi facciamo frequentemente uso della ben nota "Relazione dei complementi", definita da

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen\pi z} \qquad (4)$$

valida in tutto il campo complesso, ad eccezione dei valori per cui $sen\pi z = 0$

Inoltre, indichiamo con $\alpha$ e $\beta$ numeri reali positivi, piccoli a piacere.

Nel presente studio noi prenderemo in considerazione le seguenti applicazioni:

**2.1.01** Consideriamo l'espressione:

$$C_1 = \sum_{K=0}^{m} \binom{n}{k} (-1)^K, \quad \text{con} \quad 0 \le m \le n; \qquad \text{m, n interi non negativi}$$

Ponendo k = m – h, otteniamo:

$$C_1 = \sum_{h=0}^{m} \binom{n}{m-h} (-1)^{m-h} = \lim_{\beta \to \alpha \to 0} \sum_{h=0}^{m} \binom{n-\alpha}{m-h-\beta} (-1)^{m-h} =$$

$$= (-1)^m \lim_{\beta \to \alpha \to 0} \sum_{h=0}^{m} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)(-1)^h}{\Gamma(m+1-h-\beta)\Gamma(n+1-m+h+\beta-\alpha)}$$

Applicando la (4), ricaviamo:

$$1/\Gamma(m+1-h-\beta) = \Gamma(\beta+h-m) \frac{sen\pi\beta}{\pi} (-1)^{h-m}$$

$$1/\Gamma(n+1+h-m+\beta-\alpha) = \Gamma(\alpha-\beta+m-n-h) \frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{\pi} (-1)^{m-n-h}$$

$$\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(\alpha-n) = \frac{\pi}{sen\pi\alpha} (-1)^n$$

Pertanto, sviluppando i calcoli, utilizzando le ultime tre relazioni, e semplificando, ricaviamo:

$$C_1 = (-1)^m \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{\pi} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \int_0^1 t^{\beta-m+h-1} (1-t)^{\alpha-\beta+m-n-1-h} dt \quad =$$

$$= (-1)^m \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\beta-m-1} (1-t)^{\alpha-\beta+m-n-1} dt \frac{1-(\frac{-t}{1-t})^{m+1}}{1+\frac{t}{1-t}}; \text{ quindi}$$

$$C_1 = (-1)^m \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{\pi} \left(\int_0^1 t^{\beta-m-1} (1-t)^{\alpha-\beta+m-n} dt - (-1)^{m+1} \int_0^1 t^{\beta} (1-t)^{\alpha-\beta-n-1} dt\right) =$$

$$= (-1)^m \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{\pi} [\, T_1 + (-1)^m T_2 \,], \quad \text{avendo posto}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{\beta-m-1} (1-t)^{\alpha-\beta+m-n} dt; \qquad T_2 = \int_0^1 t^{\beta} (1-t)^{\alpha-\beta-n-1} dt.$$

Ora, $T_1 = \dfrac{\Gamma(\beta-m)\Gamma(\alpha-\beta+m-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}$; $\quad T_2 = \dfrac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)}$

Applicando la (4), ricaviamo:

$$T_1 = \frac{sen\pi\alpha}{sen\pi\beta}\frac{\pi}{sen\pi(\alpha-\beta)}\binom{n-1-\alpha}{m-\beta}; \qquad T_2 = -\frac{sen\pi\alpha}{sen\pi(\alpha-\beta)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1+\beta-\alpha)}.$$

Quindi $\quad C_1 = \sum_{K=0}^{m}\binom{n}{k}(-1)^K =$

$$= (-1)^m \lim_{\alpha\to\beta\to 0}\left(\frac{sen\pi\alpha}{sen\pi\beta}\binom{n-1-\alpha}{m-\beta} - \frac{sen\pi\alpha}{\pi}\frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1+\beta-\alpha)}\right) = (-1)^m\binom{n-1}{m},$$

formula perfettamente identica a quella riportata, a pag. 163, formula (5-16), del testo[1], e quindi è da ritenere valido il procedimento seguito.
Confrontando l'integrale $T_1$ con la (1), rileviamo che Re(x)<0 e Re(y)<0, mentre l'integrale $T_2$ presenta solo Re(y)<0

**2.1.02** Consideriamo l'espressione:

$$C_2 = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k},$$ n, intero non negativo. E' lecito porre

$$C_2 = \sum_{K=0}^{\infty}\binom{n}{k} = \lim_{\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{\infty}\binom{n-\alpha}{k} = \lim_{\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-\alpha-k)}$$

Ricordando che $1/\Gamma(n+1-\alpha-k) = \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{k-n}\Gamma(\alpha+k-n)$, ricaviamo:

$$C_2 = \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\Gamma(n+1-\alpha)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty t^{\alpha+k-n-1}e^{-t}dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\Gamma(n+1-\alpha)\int_0^\infty t^{\alpha-n-1}e^{-2t}dt$$

Calcoliamo l'integrale $T = \int_0^\infty t^{\alpha-n-1}e^{-2t}dt = (2t = y) = \int_0^\infty (\frac{y}{2})^{\alpha-n-1}e^{-y}\frac{dy}{2} = 2^{n-\alpha}\Gamma(\alpha-n)$

Quindi, applicando la (4), abbiamo:

$$C_2 = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\Gamma(n+1-\alpha)2^{n-\alpha}\Gamma(\alpha-n) = 2^n$$

Notiamo subito che l'integrale T, confrontato con la (2), presenta Re(x)<0
Il procedimento seguito conduce, quindi, ad un valore concreto ben noto, e pertanto è da considerarsi valido.

**2.1.03** Consideriamo l'espressione:

$$C_3 = \sum_{K=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^K,$$ con p>0, non intero.

Sviluppando i calcoli, otteniamo:

$$C_3=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(-1)^K}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1-k)}=-\frac{sen\pi p}{\pi}\Gamma(p+1)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-p)}{k!}=$$

$$=-\frac{sen\pi p}{\pi}\Gamma(p+1)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{\infty}t^{K-p-1}e^{-t}dt=-\frac{sen\pi p}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\infty}t^{-p-1}e^{t}e^{-t}dt=$$

$$=-\frac{sen\pi p}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\infty}t^{-p-1}dt$$

Calcoliamo l'integrale $T=\int_0^{\infty}t^{-p-1}dt=\int_0^{1}t^{-p-1}dt+\int_0^{1}t^{p-1}dt=T_1+T_2$

Avendo posto p>0, l'integrale $T_1=\int_0^{1}t^{-p-1}dt$ risulta chiaramente divergente, ma se lo riguardiamo come un intergrale di Eulero di prima specie, otteniamo:

$$T_1=\int_0^{1}t^{-p-1}(1-t)^{1-1}dt=\frac{\Gamma(-p)\Gamma(1)}{\Gamma(1-p)}=-\frac{1}{p}$$

L'integrale $T_2=\frac{1}{p}$, e quindi l'integrale $T=T_1+T_2=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=0$

Essendo p un numero non intero, $sen\pi p\neq 0$, e quindi

$$C_3=\sum_{K=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^K=0,\quad \text{come era da aspettarsi.}$$

Inoltre, possiamo calcolare l'integrale T ponendo $t=\frac{y}{1-y}$; così facendo otteniamo:

$$T=\int_0^{\infty}t^{-p-1}dt=\int_0^{1}(\frac{y}{1-y})^{-p-1}\frac{dy}{(1-y)^2}=\int_0^{1}y^{-p-1}(1-y)^{p-1}dy=\frac{\Gamma(-p)\Gamma(p)}{\Gamma(0)}=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1+p)}\frac{-\pi}{sen\pi p}\frac{1}{\Gamma(0)}=0,$$

in quanto $sen\pi p\neq 0$, e $\frac{1}{\Gamma(0)}=0$, e quindi $C_3=0.$

$T_1$ rappresenta un integrale di Eulero di prima specie, con Re(x)<0

Il procedimento seguito conduce ad un valore concreto ben noto, e pertanto è da considerarsi valido.

**2.1.04** Consideriamo l'espressione:

$$C_4=\sum_{K=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k},$$ con $0\le m\le n$; m,n, interi non negativi. E' lecito porre:

$$C_4=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{m}\binom{m-\alpha}{k}\binom{n-\alpha}{k}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{m}\frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1-\alpha-k)}\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-\alpha-k)}$$

Sviluppando i calcoli, ed applicando la (4), ricaviamo:

$$C_4=\lim_{\alpha\to 0}(\frac{sen\pi\alpha}{\pi})^2(-1)^{m+n}\sum_{K=0}^{m}\int_0^{1}t^{\alpha+K-m-1}(1-t)^{m-\alpha}dt\int_0^{1}u^{\alpha+K-n-1}(1-u)^{n-\alpha}du=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\right)^2(-1)^{m+n}\int_0^1 t^{\alpha-m-1}(1-t)^{m-\alpha}dt\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n-\alpha}du\frac{1-(tu)^{m+1}}{1-tu}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\right)^2(-1)^{m+n}(T_1-T_2),$$ avendo posto

$$T_1=\int_0^1 t^{\alpha-m-1}(1-t)^{m-\alpha}dt\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n-\alpha}\frac{du}{1-tu}=T_{11}T_{12}$$

$$T_2=\int_0^1 t^{\alpha-m-1}(1-t)^{m-\alpha}dt\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n-\alpha}du\frac{(tu)^{m+1}}{1-tu}\quad,\quad \text{e}$$

$$T_{12}=\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n-\alpha}\frac{du}{1-tu}$$

Calcoliamo l'integrale $T_{12}$ ;ponendo $u=\frac{z}{1+z}$, otteniamo:

$$T_{12}=\int_0^\infty\left(\frac{z}{1+z}\right)^{\alpha-n-1}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{n-\alpha}\frac{1}{1-\frac{tz}{1+z}}\frac{dz}{(1+z)^2}=\int_0^\infty\frac{z^{\alpha-n-1}}{1+z-tz}dz;$$

ponendo z-tz=w, da cui $z=\frac{w}{1-t}$, ricaviamo:

$$T_{12}=(1-t)^{n-\alpha}\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw=(1-t)^{n-\alpha}U,\quad \text{essendo } U=\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw$$

Dai testi più accreditati sappiamo che:

$$\int_0^\infty\frac{w^{z-1}}{1+w}dw=\frac{\pi}{sen\pi z}\qquad \text{per}\quad 0<\text{Re}(z)<1.$$

Nel nostro caso Re(x) = $\alpha-n<0$, se n>0, ($\alpha$, reale positivo, piccolo a piacere).

Noi dimostreremo, qui di seguito, che l'integrale U presenta il valore seguente:

$$U=\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw=\frac{\pi}{sen\pi(\alpha-n)}=\frac{\pi}{sen\alpha}(-1)^n$$

Infatti, $U=\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw=\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}(1-w)}{1-w^2}dw=\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n-1}}{1-w^2}dw-\int_0^\infty\frac{w^{\alpha-n}}{1-w^2}dw=$

$$=\int_0^1\frac{w^{\alpha-n-1}}{1-w^2}dw+\int_1^0\frac{w^{n+1-\alpha}}{1-w^{-2}}\left(-\frac{dw}{w^2}\right)-\int_0^1\frac{w^{\alpha-n}}{1-w^2}dw-\int_1^0\frac{w^{n-\alpha}}{1-w^{-2}}\left(-\frac{dw}{w^2}\right)=$$

$$=\int_0^1\frac{w^{n+1-\alpha}-w^{\alpha-n-1}}{w^2-1}dw+\int_0^1\frac{w^{n-\alpha}-w^{\alpha-n}}{1-w^2}dw$$

Ponendo, $w^2=y$, otteniamo:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^{\frac{n-\alpha}{2}}-y^{\frac{\alpha-n}{2}-1}}{y-1}dy-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^{\frac{n-\alpha+1}{2}-1}-y^{\frac{\alpha-n+1}{2}-1}}{y-1}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{n-\alpha}{2}+1\right)-\Psi\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{n+1-\alpha}{2}\right)-\Psi\left(\frac{\alpha-n+1}{2}\right)\right],$$

essendo $\Psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

Ricordando la nota relazione: $\Psi(1\text{-}z) - \Psi(z) = \pi \cot g\pi z$ (5)

(Gauss. K. F., Werke, Bd. III. Göttingen 1876), abbiamo:

$$U=\frac{1}{2}(\pi \cot g\pi \frac{\alpha-n}{2} - \pi \cot g\pi \frac{\alpha-n+1}{2}) = \frac{\pi}{sen\pi(\alpha-n)} = \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^n$$

Quindi, abbiamo: $U = \int_0^\infty \frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw = \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^n$ (6)

La formula (6) si presenta frequentemente nel calcolo di moltissimi integrali

Procedendo nel calcolo di $T_1$, otteniamo:

$$T_1 = T_{11}T_{12} = \int_0^1 t^{\alpha-m-1}(1-t)^{m-\alpha}\, dt((1-t)^{n-\alpha}\frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^n) =$$

$$= (\frac{\pi}{sen\pi\alpha})^2(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(m+n+1-2\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(m+1-\alpha)}, \qquad (7)$$

Pertanto, $\lim_{\alpha\to 0}(\frac{sen\pi\alpha}{\pi})^2(-1)^{m+n}T_1 = \binom{m+n}{m}$

Non procediamo al calcolo di $T_2$ in quanto risulta che:

$$\lim_{\alpha\to 0}(\frac{sen\pi\alpha}{\pi})^2(-1)^{m+n}T_2 = 0 \qquad (7')$$

Infatti, riprendendo l'espressione $C_4$, possiamo porre:

$$C_4 = \sum_{K=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \lim_{\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{\infty}\binom{m-\alpha}{k}\binom{n-\alpha}{k} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}(\frac{sen\pi\alpha}{\pi})^2(-1)^{m+n}\int_0^1 t^{\alpha-m-1}(1-t)^{n-\alpha}dt\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n-\alpha}\frac{du}{1-tu} = \binom{m+n}{m}$$

Risulta così giustificata la (7')

Per m=n, otteniamo la ben nota formula:

$$C_{4,1} = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Confrontando l'integrale $T_1$, che figura nella (7), con l'integrale (1), rileviamo che Re(x)<0. Il procedimento seguito conduce, quindi, a formule note, e pertanto è da ritenersi valido.

**2.1.05** Consideriamo l'espressione:

$C_5 = \sum_{K=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}^{-1}$, con $n \le m$; m,n interi non negativi. E' lecito porre

$$C_5 = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{n} \binom{m-\alpha}{k} \binom{n-\alpha}{k}^{-1} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{n} \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1-\alpha-k)} \left( \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-\alpha-k)} \right)^{-1}$$

Svolgendo i calcoli ed applicando la (4), ricaviamo:

$$C_5 = (-1)^{n-m} \frac{1}{\Gamma(m-n)} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sum_{K=0}^{n} \int_0^1 t^{\alpha+K-m-1} (1-t)^{m-n-1} dt =$$

$$= (-1)^{n-m} \frac{1}{\Gamma(m-n)} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_9^1 t^{\alpha-m-1} (1-t)^{m-n-1} \frac{1-t^{n+1}}{1-t} dt$$

$$= (-1)^{n-m} \frac{1}{\Gamma(m-n)} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} (T_1 - T_2) \text{ , dove}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{\alpha-m-1} (1-t)^{m-n-2} dt = \frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(\alpha-n-1)}, \quad \text{e}$$

$$T_2 = \int_0^1 t^{\alpha+n-m} (1-t)^{m-n-2} dt = \frac{\Gamma(\alpha-m+n+1)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(\alpha)}$$

Applicando la (4), ricaviamo:

$$T_1 = \frac{\Gamma(m-n-1)\Gamma(n+2-\alpha)}{\Gamma(m+1-\alpha)} (-1)^{m+n+1};$$

$$T_2 = \frac{\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-n-\alpha)} \frac{\pi}{sen\pi\alpha} (-1)^{n+1-m}; \quad \left( \lim_{\alpha \to 0} \Gamma(\alpha) sen\pi\alpha = \pi \right); \text{ quindi:}$$

$$C_5 = \sum_{K=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{k}^{-1} = -\frac{n+1}{m-n-1} + \frac{1}{m-n-1} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n)\Gamma(n+1)} = \frac{n+1}{m-n-1} \left( \binom{m}{n+1} - 1 \right) \text{ , (8)}$$

Notiamo che gli integrali $T_1$ e $T_2$ rappresentano due integrali di Eulero di prima specie, con Re(x)<0.

Dalla (8), per m=n, otteniamo: $C_{5,1} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k}^{-1}$ =n+1, come era da attendersi.

Dalla (8), per m= n+1, rileviamo che $C_5$ presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ,

ma l'espressione in esame presenta un valore finito.

Infatti, ponendo nella (8) m=n+1+q, otteniamo:

$$C_{5,2} = \lim_{q \to 0} \frac{n+1}{q} \left( \binom{n+1+q}{n+1} - 1 \right) = (n+1) \lim_{q \to 0} D_q \binom{n+1+q}{n+1}$$

Posto y(q)= $\binom{n+1+q}{n+1} = \frac{(n+1+q)(n+1+q-1)...(n+1+q-n-1+1)}{(n+1)!}$

Prendendo il logaritmo naturale dei membri della precedente, e derivando rispetto ad q, ricaviamo:

$\frac{y'(q)}{y(q)} = \frac{1}{n+1+q} + \frac{1}{n+q} + ... + \frac{1}{1+q}$. Passando al limite per q$\to 0$, abbiamo il valore di $C_5$

per m= n+1, e cioè: $C_{5,2} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n+1}{k}\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\sum_{K=0}^{n} \frac{1}{k+1}$

Dalla (8), per m= n+2, ricaviamo: $C_{5,3} = = \sum_{K=0}^{n} \binom{n+2}{k}\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)^2$

Per m<n, dalla (8) rileviamo: $C_{5,4} = \frac{n+1}{n+1-m}$

Confrontando gli integrali $T_1$ e $T_2$ con la (1), osserviamo che Re(x)<0.

Le formule ricavate possono essere facilmente verificate, e pertanto il procedimento seguito deve ritenersi valido.

**2.1.06** Consideriamo l'espressione:

$$C_6 = \sum_{K=0}^{m} \binom{n+k}{k}; \qquad \text{E' lecito porre:}$$

$$C_6 = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{m} \binom{n+k-\alpha}{k} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{m} \frac{\Gamma(n+1+k-\alpha)}{k!\Gamma(n+1-\alpha)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{m} \frac{\Gamma(n+1+k-\alpha)\Gamma(\alpha-n)}{k!} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{m} \int_0^1 t^{n+K-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\, dt =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n \frac{1-t^{m+1}}{1-t}\, dt = \lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\,\pi\alpha}{\pi}(-1)^n (T_1 - T_2)$$

essendo:

$$T_1 = \int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-2}\, dt = \frac{\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(\alpha-n-1)}{\Gamma(0)} = \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(2+n-\alpha)\Gamma(0)} \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^{n+1}$$

Ora, $\lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n T_1 = -\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)\Gamma(0)} = 0$, in quanto $\Gamma(0^+) = \infty, \Gamma(0^-) = -\infty$

Calcoliamo l'integrale $T_2$

$$T_2 = \int_0^1 t^{n+m+1-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-2}\, dt = \frac{\Gamma(n+m+2-\alpha)\Gamma(\alpha-n-1)}{m!} = \frac{\Gamma(n+m+2-\alpha)}{m!\Gamma(n+2-\alpha)} \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^{n+1}$$

Quindi: $\lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n T_2 = -\frac{\Gamma(n+m+2)}{m!\Gamma(n+2)} = -\binom{n+m+1}{m}$

Pertanto: $C_6 = \sum_{K=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$

Confrontando gli integrali $T_1$ e $T_2$ con la (1), risulta chiaro ed evidente che Re(y)<0
Il risultato ottenuto può essere facilmente verificato, e pertanto il procedimento seguito deve ritenersi valido.

**2.1.07** Consideriamo l'espressione:

$$C_7 = \sum_{K=0}^{m} \binom{-n-k}{s-k}$$ , con s$\geq m$, n,s,m, interi non negativi

Posto m-k=h, ricaviamo:

$$C_7 = \sum_{h=0}^{m} \binom{-n-m+h}{s+h-m} = \lim_{\alpha\to 0} \sum_{h=0}^{m} \binom{-n-m+h+\alpha}{s+h-m} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \sum_{h=0}^{m} \frac{\Gamma(-n-m+h+1+\alpha)\Gamma(s+n-\alpha)}{\Gamma(s+1+h-m)} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1} \sum_{h=0}^{m} \int_0^1 t^{\alpha+h-n-m}(1-t)^{s+n-1-\alpha} dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1} \int_0^1 t^{\alpha-n-m}(1-t)^{s+n-1-\alpha} \frac{1-t^{m+1}}{1-t} dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1}(T_1 - T_2)$$ , avendo posto

$$T_1 = \int_0^1 t^{\alpha-n-m}(1-t)^{s+n-2-\alpha} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1-n-m)\Gamma(s+n-1-\alpha)}{(s-m-1)!} = \frac{\Gamma(s+n-1-\alpha)}{(s-m-1)!\Gamma(n+m-\alpha)} \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^{n+m+1}$$

$$T_2 = \int_0^1 t^{\alpha-n+1}(1-t)^{s+n-2-\alpha} dt = \frac{\Gamma(\alpha-n+2)\Gamma(s+n-1-\alpha)}{s!} = \frac{\Gamma(s+n-1-\alpha)}{s!\Gamma(n-1-\alpha)} \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^{n}$$

Quindi: $$\lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1} T_1 = (-1)^{s+m} \binom{s+n-2}{n+m-1};$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^{s+n+1} T_2 = (-1)^{s-1} \binom{s+n-2}{s}$$

Pertanto: $$C_7 = \sum_{K=0}^{m} \binom{-n-k}{s-k} = (-1)^{s+m} \binom{s+n-2}{n+m-1} + (-1)^{s} \binom{s+n-2}{s}, \qquad (8')$$

Per s=m, dalla (8') otteniamo che $\sum_{K=0}^{m} \binom{-n-k}{m-n} = (-1)^m \binom{m+n-2}{m}$

Confrontando gli integrali $T_1$ e $T_2$ con la (1), risulta che Re(x)<0.

I risultati ottenuti possono essere facilmente verificati, e quindi il procedimento seguito deve ritenersi valido.

**2.1.08** Consideriamo l'espressione

$$C_8 = \sum_{K=0}^{n} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^K}{k+1}, \quad n \geq 0, \quad \text{n intero.} \qquad \text{E' lecito porre:}$$

$$C_8 = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\infty} \binom{n+k-\alpha}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^K}{k+1} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k-\alpha)}{\Gamma(n+1-k-\alpha)}\frac{1}{\Gamma^2(k+1)}\frac{(-1)^K}{k+1} =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+k-\alpha)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-n)}\frac{\Gamma(\alpha+k-n)\Gamma(n+2-\alpha)}{\Gamma(k+2)\Gamma(n+2-\alpha)}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n;$$

$$C_8 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{n+1-\alpha}\left(\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\right)^2 \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^1 t^{n+K-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1}dt\int_0^1 u^{\alpha+K-n-1}(1-u)^{n+1-\alpha}du =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{n+1-\alpha}\left(\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1}\frac{dt}{1-tu}\int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{n+1-\alpha}du =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{n+1-\alpha}\left(\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\right)^2 (T_1)(T_2), \qquad \text{avendo posto:}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1}\frac{dt}{1-tu} = \int_0^1 t^{\alpha-n-1}(1-t)^{n-\alpha}\frac{dt}{1-u(1-t)}; \text{ ponendo } t = \frac{y}{1+y}, \text{ abbiamo:}$$

$$T_1 = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-n-1}}{1+y-u}dy; \text{ ponendo y=(1-u)w, otteniamo:}$$

$$T_1 = (1-u)^{\alpha-n-1}\int_0^\infty \frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw = \frac{\pi}{sen\pi\alpha}(-1)^n(1-u)^{\alpha-n-1}$$

L'integrale $\int_0^\infty \frac{w^{\alpha-n-1}}{1+w}dw$ l'abbiamo già incontrato in 2.1.04 , formula (6).

Pertanto:

$$C_8 = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{n+1-\alpha}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\int_0^1 u^{\alpha-n-1}du$$

Per n>0, l'integrale $\int_0^1 u^{\alpha-n-1}du$ è certamente divergente, ma se lo consideriamo come un integrale di Eulero di prima specie, otteniamo

$$\int_0^1 u^{\alpha-n-1}du = \int_0^1 u^{\alpha-n-1}(1-u)^{1-1}du = \frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} = \frac{1}{\alpha-n}$$

Quindi, in definitiva, abbiamo:

$$C_8 = \sum_{K=0}^{n} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^K}{k+1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{n+1-\alpha}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}(-1)^n\frac{1}{\alpha-n} = 0$$

Lo stesso risultato lo ritroviamo nel testo [1], a pag. 179-180, e pertanto è da ritenersi valido il procedimento seguito.

**2.1.09** Consideriamo l'espressione:

$C_9 = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{-m-k}{s-k}(-1)^K$, con s,m,n, interi non negativi, s$\geq n$. Posto n-k=h, abbiamo:

$$C_9 = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}\binom{-m+h-n}{s+h-n}(-1)^{n-h} = (-1)^n \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}\binom{-m+h-n+\alpha}{s+h-n+\beta}(-1)^h =$$

$$= (-1)^{s+m+n} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{\pi} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}(-1)^h \frac{\Gamma(\alpha+1+h-m-n)\Gamma(m+s+\beta-\alpha)}{\Gamma(s+1+h+\beta-n)}, \quad (9)$$

$$C_9 = (-1)^{n+m+s} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{\pi} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}(-1)^h \int_0^1 t^{\alpha+h-m-n}(1-t)^{m+s+\beta-\alpha-1} dt, \text{ cioè}$$

$$C_9 = (-1)^{n+m+s} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-m-n}(1-t)^{m+s+\beta-\alpha-1+n} dt \quad (9')$$

Quindi:

$$C_9 = (-1)^{n+m+s} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1-m-n)\Gamma(m+n+s+\beta-\alpha)}{\Gamma(s+1+\beta)}; \text{ cioè:}$$

$$C_9 = (-1)^{s+1} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{\pi} \frac{\pi}{sen\pi\alpha} \frac{\Gamma(m+n+s+\beta-\alpha)}{\Gamma(s+1+\beta)\Gamma(m+n-\alpha)} \quad (9'')$$

Ricordando che $(-1)^\beta(-1)^\beta = ((-1)(-1))^\beta = 1$, da cui $(-1)^\beta = (-1)^{-\beta}$, abbiamo:

$$\frac{sen\pi(\alpha-\beta)}{sen\pi\alpha} = \frac{e^{i\pi(\alpha-\beta)} - e^{-i\pi(\alpha-\beta)}}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = (-1)^\beta, \quad (9\text{-a})$$

per cui dalla (9'') otteniamo:

$$C_9 = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{-m-k}{s-k}(-1)^K = (-1)^s \binom{m+n+s-1}{s}$$

Confrontando l'integrale che figura nella (9') con la (1), rileviamo che Re(x)<0
Operando sulla (9), perveniamo alla seguente relazione:

$$C_9 = (-1)^{s+1} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi\beta}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-m-n}(1-t)^{n-s-1-\beta}(1+\frac{1}{1-t})^n dt =$$

$$= (-1)^{s+1} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi\beta}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-m-n}(1-t)^{-s-1-\beta} dt = (-1)^{s+1} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi\beta}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha-n-m+1)\Gamma(-s-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1-m-n-s)} =$$

$$= (-1)^{s+1} \lim_{\alpha \to \beta \to 0} \frac{sen\pi\beta}{\pi} \frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{sen\pi\beta} \frac{\pi}{sen\pi\alpha} \frac{\Gamma(m+n+s+\beta-\alpha)}{\Gamma(n+m-\alpha)\Gamma(s+1+\beta)} =$$

$= (-1)^{s}\binom{m+n+s-1}{s}$ , avendo applicata la (9-a).

Osserviamo che l'ultimo integrale contenuto nella precedente relazione, confrontato con la (1), presenta Re(x)<0 e Re(y)<0.

Poichè $\binom{-m-k}{s-k} = \frac{(-m-k)(-m-k-1)...(-m-k-s+k+1)}{(s-k)!} = (-1)^{s-K}\binom{m+s-1}{s-k}$,

ricaviamo: $C_9 = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^K(-1)^{s-K}\binom{m+s-1}{s-k} = (-1)^s\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+s-1}{s-k} =$

$= (-1)^s\binom{m+n+s-1}{s}$, da cui $\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+s-1}{s-k} = \binom{m+n+s-1}{s}$

Ritroviamo così la formula analoga riportata dal testo [1] a pag. 167, e quindi risultano validi i procedimenti seguiti.

**2.1.10** Consideriamo l'espressione:

$$C_{10} = \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\binom{-m-k-2}{k+1}^{-1}\frac{1}{(k+1)(m+1+k)}$$ , con m,n, interi non negativi

Il simbolo $\left[\frac{n}{2}\right]$ rappresenta il massimo numero intero non eccedente $\frac{n}{2}$

Ricordiamo che:

$$\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}z^K = (1+4z)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right], \qquad (10)$$

(formula nota,vedasi testo [1] a pag. 200).

Integrando ambo i membri della (10), rispetto a z, tra 0 e x, abbiamo:

$$\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}x^{K+1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} - 1\right] \qquad (11)$$

Ora è lecito porre:

$$C_{10} = \lim_{\alpha \to 0}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\binom{-m-k-2+\alpha}{k+1}^{-1}\frac{1}{(k+1)(m+1+k-\alpha)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{(k+1)(m+1+k-\alpha)}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(\alpha-2k-2-m)}{\Gamma(\alpha-k-m-1)} =$$

$$= - \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{1}{(k+1)} \int_0^1 t^{\alpha-2K-m-3} (1-t)^{K+1} dt$$

Applicando la (11), e ponendo in essa $x = \dfrac{1-t}{t^2}$, otteniamo:

$\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2} = \dfrac{t-1}{t}$ e $\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2} = \dfrac{1}{t}$, e quindi:

$$C_{10} = -\frac{1}{n+2} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^1 t^{\alpha-m-1} \left[ (\frac{t-1}{t})^{n+2} + (\frac{1}{t})^{n+2} - 1 \right] dt =$$

$$= -\frac{1}{n+2} \lim_{\alpha \to 0} \left[ (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} (1-t)^{n+2} dt + \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} dt - \int_0^1 t^{\alpha-m-1} \right] =$$

$$= -\frac{1}{n+2} \lim_{\alpha \to 0} \left[ (-1)^n T_1 + T_2 - T_3 \right], \text{ avendo posto:}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} (1-t)^{n+2} dt, \quad T_2 = \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} dt, \quad T_3 = \int_0^1 t^{\alpha-m-1} dt$$

Gli integrali $T_2$ e $T_3$ presentano le stesse caratteristiche dell'integrale incontrato in 2.1.08, e quindi, nello stesso modo, li consideriamo come integrali di Eulero di prima specie, e cioè: $T_2 = \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} (1-t)^{1-1} dt = \dfrac{\Gamma(\alpha-m-n-2)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha-m-n-1)} = \dfrac{1}{\alpha-m-n-2}$

$$T_3 = \int_0^1 t^{\alpha-m-1} (1-t)^{1-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} = \frac{1}{\alpha-m}, \text{ mentre}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{\alpha-m-n-3} (1-t)^{n+2} dt = \frac{\Gamma(\alpha-m-n-2)\Gamma(n+3)}{\Gamma(\alpha+1-m)} = \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(n+3)}{\Gamma(3+m+n-\alpha)} (-1)^{n+1} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{1}{m-\alpha} \binom{2+m+n-\alpha}{n+2}^{-1}. \text{ Quindi:}$$

$$C_{10} = \frac{1}{n+2} \left[ \binom{2+m+n}{m}^{-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n+2} - \frac{1}{m} \right] = \frac{1}{m(n+2)} \left[ \binom{m+n+2}{m}^{-1} - \frac{n+2}{m+n+2} \right]$$

Gli integrale $T_1$ , $T_2$ e $T_3$ presentano Re(x)<0

Il risultato ottenuto può essere facilmente verificato, e quindi il procedimento seguito deve ritenersi valido.

**2.1.11** Consideriamo l'espressione:

$$C_{11} = \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{1}{k+1} \binom{k-m}{s-k} \text{ ; con m,n,s, interi non negativi, e } s \geq n$$

Ora: $\dbinom{k-m}{s-k} = (-1)^{s+K} \dbinom{m+s-2k-1}{s-k}$; quindi:

$$C_{11} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{(-1)^{s+K}}{k+1} \binom{m+s-2k-1-\alpha}{s-k}, \text{ cioè}$$

$$C_{11} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{(-1)^{s+K}}{k+1} \frac{\Gamma(m+s-2k-\alpha)}{\Gamma(s+1-k)\Gamma(m-k-\alpha)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi} \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{(-1)^{s+m+1}}{k+1} \frac{\Gamma(m+s-2k-\alpha)\Gamma(1+\alpha+k-m)}{\Gamma(s+1-k)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\pi\alpha}{\pi} \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{(-1)^{s+m+1}}{k+1} \int_0^1 t^{m+s-2K-\alpha-1} (1-t)^{\alpha+K-m}\, dt$$

Applicando la (11), ed essendo x=$\frac{1-t}{t^2}$, otteniamo:

$$C_{11} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{(-1)^{s+m+1}}{n+2} \frac{sen\pi\alpha}{\pi} \int_0^1 t^{m+s+1-\alpha} (1-t)^{\alpha-m-1} \left[ (\frac{t-1}{t})^{n+2} + (\frac{1}{t})^{n+2} - 1 \right] dt =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{(-1)^{s+m+1}}{n+2} \frac{sen\pi\alpha}{\pi} \left[ (-1)^n T_1 + T_2 - T_3 \right], \qquad \text{avendo posto:}$$

$$T_1 = \int_0^1 t^{m+s-n-1-\alpha} (1-t)^{\alpha-m-1+n+2} dt = \frac{\Gamma(m+s-n-\alpha)\Gamma(\alpha-m+n+2)}{\Gamma(s+2)} =$$

$$= \binom{m+s-n-\alpha-1}{s+1} \frac{\pi}{sen\pi\alpha} (-1)^{m+n}$$

$$T_2 = \int_0^1 t^{m+s-n-\alpha-1} (1-t)^{\alpha-m-1} dt = \frac{\Gamma(m+s-n-\alpha)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(s-n)} = \binom{m+s-n-1}{m} \frac{\pi(-1)^m}{sen\pi\alpha}$$

$$T_3 = \int_0^1 t^{m+s+1-\alpha} (1-t)^{\alpha-m-1} dt = \frac{\Gamma(m+s+2-\alpha)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(s+2)} = \binom{m+s+1-\alpha}{s+1} \frac{\pi(-1)^m}{sen\pi\alpha}$$

Pertanto, $C_{11} = \frac{(-1)^{s+1}}{n+2} \left[ \binom{m+s-n-1}{s+1} + \binom{m+s-n-1}{m} - \binom{m+s+1}{m} \right]$

Per s=n, abbiamo: $C_{11,1} = \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{1}{k+1} \binom{k-m}{n-k} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \left[ \binom{m-1}{n+1} - \binom{m+n+1}{m} \right]$

Per s=n+1, abbiamo: $C_{11,2} = \sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \frac{1}{k+1} \binom{k-m}{n+1-k} = \frac{(-1)^n}{n+2} \left[ \binom{m}{n+2} + 1 - \binom{m+n+2}{m} \right]$

Confrontando gli integrali $T_1$ $T_2$ $T_3$ con la (1), rileviamo che Re(y)<0, in tutti e tre.
I risultati ottenuti possono essere facilmente verificati, e quindi il procedimento seguito deve ritenersi valido.

**2.1.12** Consideriamo l'espressione:

$$C_{12}=\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{k+1}\binom{k-m-1}{2k}$$, con m,n, interi non negativi, m>n.

E' lecito porre: $C_{12}=\lim_{\beta\to\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{k+1}\binom{k-m-1-\beta}{2k-\alpha}=$

$$=\lim_{\beta\to\alpha\to 0}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{k+1}\frac{\Gamma(k-m-\beta)}{\Gamma(2k+1-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta-m-k)}=$$

$$=\lim_{\beta\to\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{k+1}\int_0^1 t^{\alpha-2K-1}(1-t)^{K-m-\beta-1}dt$$

Applicando la (11) considerando che x=$\frac{1-t}{t^2}$, in modo analogo ai casi precedenti,otteniamo:

$$C_{12}=\lim_{\beta\to\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\frac{1}{n+2}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{-m-\beta-2}\left[\left(\frac{t-1}{t}\right)^{n+2}+\left(\frac{1}{t}\right)^{n+2}-1\right]dt=$$

$$=\lim_{\beta\to\alpha\to 0}\frac{sen\pi\alpha}{\pi}\frac{1}{n+2}\left[(-1)^n T_1+T_2-T_3\right],\quad \text{avendo posto:}$$

$$T_1=\int_0^1 t^{\alpha-n-1}(1-t)^{n-m-\beta}dt=\frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1-m-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1-m)}=\binom{m-1+\beta-\alpha}{n-\alpha}\frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{sen\pi\alpha}\frac{\pi}{sen\pi\beta}$$

$$T_2=\int_0^1 t^{\alpha-n-1}(1-t)^{-m-\beta-2}dt=\frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(-m-1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta-m-n-1)}=\binom{m+n+1+\beta-\alpha}{n-\alpha}\frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{sen\pi\beta}\frac{\pi}{sen\pi\alpha}$$

$$T_3=\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{-m-2-\beta}dt=\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(-m-1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1-m)}=\binom{m+\beta}{1+\alpha}^{-1}\frac{1}{m+1+\beta}\frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{sen\pi\beta}$$

Ricordando la (9-a) di 2.1.09, abbiamo: $\frac{sen\pi(\beta-\alpha)}{sen\pi\beta}=(-1)^\alpha$, e quindi:

$$C_{12}=\sum_{K=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\frac{1}{k+1}\binom{k-m-1}{2k}=\frac{1}{n+2}\left[(-1)^n\binom{m-1}{n}+\binom{m+n+1}{n}\right]$$

Gli integrali $T_1$ e $T_2$ rappresentano integrali di Eulero di prima specie, con Re(x)<0 e Re(y)<0; l'integrale $T_3$ rappresenta un integrale di Eulero di prima specie con Re(y)<0. La formula ottenuta può essere facilmente verificata, e quindi il procedimento seguito deve ritenersi valido.

Per ragioni di spazio omettiamo di riportare tanti altri casi concreti che forniscono ulteriori conferme del fatto che gli integrali euleriani possono essere utilmente impiegati , per ottenere risultati concreti , anche quando sono divergenti , e cioè quando non sono verificate le condizioni (3).

Desideriamo ringraziare vivamente il Prof. Filippo Aluffi Pentini per gli utilissimi suggerimenti forniti

Bibliografia

[1] Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH, Oren PATASHNIK
MATEMATICA DISCRETA
(principi matematici per l'informatica)
Ulrico Hoepli Editore – Milano 1996

[2] Kenneth S. MILLER, Bertran ROSS
AN INTRODUCTION TO THE FRACTIONAL CALCULUS AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION
John Wiley and sons, INC. N.Y. 1993

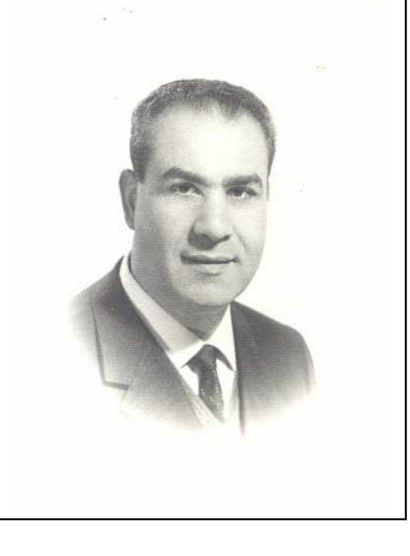
[3] Keith B. OLDAM , Jerome SPANIER
THE FRACTIONAL CALCULUS
Academic Press. N:Y: 1974

[4] WHITTAKER E. T. and WATSON G.N.
MODERN ANALYSIS
$4^{th}$ Ed. Cambridge at the University Press 1952

[5] Reinhold Remmert
Classical Topics in Complex Function Theory
Springer-Verlag N.Y. Berlin -1997

[6] A.Ghizzetti – L. Marchetti – A. Ossicini
Lezioni di complementi di matematica
Università degli studi di Roma -1972

[7] Newman, F.W.,
On $\Gamma(a)$ especially when a is negative.
Cambridge and Dublin Math. Journ. - 3, 57-60 (1848)



Il dott.ing.Pasquale Cutolo, Commendatore della Repubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Elettrotecnica presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni (ora ISCTI). Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazione.



p.cutolo@inwind.it