Spunti e curiosità matematiche per una interessante didattica (I parte)

di Guido Carolla[1]

L'insegnamento della matematica nelle scuole non è del tutto efficace, forse per una scarsa capacità d'interessare gli studenti ai fini di una effettiva assimilazione e perché si vuole interessarli a problemi sempre più astratti e non reali.

Nel secolo scorso nel suo libro "Le matematiche" Pierre Léon Boutroux (1880-1922) scriveva "Sono ormai quattrocento anni che si tenta di mettere i matematici a contatto col mondo esterno: nessuna impresa è mai stata più fallace" e tuttavia concludeva che "un libro di matematica è bene che rimanga un po' astruso; se esso richiederà maggiore riflessione, l'impressione che se ne trarrà sarà più conforme alla verità".

Ed è opinione di molti che la matematica è astrusa fin dalle sue parti più elementari.

Ma è ovvio che nell'insegnamento si debba rendere la disciplina più appetibile al palato degli alunni, specialmente in un grado elementare, in cui è riconosciuta da tutti l'opportunità di ridurre al minimo proprio i concetti astratti, ai quali l'alunno deve essere preparato per gradi e deve giungere spontaneamente, a mano a mano che le sue facoltà si vanno sviluppando.

Senza rinviare di molti anni l'uso di quei simboli che fanno perdere il contatto diretto con la realtà conseguentemente fanno calare l'interesse, si vuole non solo suggerire ed esemplificare una serie di spunti e curiosità aritmetiche ed algebriche, ricchi di stimoli, ma anche presentare in maniera semplice alcuni argomenti classici che fanno parte dei programmi ministeriali di matematica che sicuramente mirano a potenziare nei giovani studenti la voglia di fare matematica.

Di seguito si riportano alcuni esempi su vari argomenti che, aderenti o meno ai programmi, possano stimolare gli studenti e rendere interessanti le argomentazioni, perché spesso legate a problemi reali, facendo così raggiungere lo scopo che ci si prefigge.

Si vuole sapere la data della S. Pasqua di un determinato anno usando il metodo pubblicato nel 1800 dal grande matematico tedesco Karl Friederich Gauss (1777-1855).

Si divida il numero dell'anno ad esempio		**2011**
per 19 e sia A il resto		**A=16**
per 4 e sia B il resto		**B=3**
per 7 e sia C il resto		**C=2**
si divida per il numero	**19A+24=**	**328**
per 30 e sia D il resto		**D=28**
si divida infine	**2B+4C+6D+5=**	**187**
per 7 e sia E il resto		**E=5**

La Pasqua del 2011 sarà ai 22+D+E eventualmente -31di marzo =55-31=24 aprile

ed anche più precisamente ai D+E-9 di aprile =24

Si noti che se la data risultante dal calcolo è il 26 aprile, si deve assumere il 19 aprile, caso rarissimo, verificatosi nel 1981; se la risultante dal calcolo è il 25 aprile, con altre condizioni, verificatosi nel 1954, si deve assumere come data di Pasqua il 18 aprile. Quanto sopra è valido per gli anni gregoriani, a seguito della riforma del papa Gregorio XIII il cui

[1] Docente di Matematica e Dirigente scolastico in ogni ordine di Scuola, ora a r.; guidocarolla@libero.it

pontificato fu dal 1572 al 1585. Quindi la Pasqua mai prima del 22/3 (l'ultima del 22/3 nel 1818, si avrà ancora "bassissima" solo nel 2285), né dopo il 25/4 (le ultime del 25/4 si sono avute nel 1886 e nel 1943, si avrà ancora "altissima" nel 2038).

Calcolo dell'indice di massa corporea IMC, da comparare con relative tabelle, di cui qui a seguire due esempi:

IMC=Kg/statura(m^2)　　IMC <19 sottopeso

da 19 a 24 medio peso
da 25 a 30 soprappeso
>30 obesità

ad es. Guido ha l'IMC=69/$(1{,}71)^2$=69/1,9241=23,597, è in medio peso; Rosanna ha l'IMC=73/$(1{,}65)^2$ =73/2,7225=26,81, quindi è in soprappeso. Il semplice argomento si presta ad educare gli adolescenti ad una equilibrata e sana alimentazione, per la quale i docenti potranno dare preziosi consigli, viste le preoccupanti statistiche italiane relative al peso delle persone.

Le posizioni di N persone intorno ad un tavolo sono date dalle permutazioni di N elementi, cioè da N!= 2x3x4x…xN, ad es. se N=4, si avranno quattro fattoriale posizioni, cioè 4!= 2x3x4=24; se N=6 si avranno 6!=2x3x4x5x6=720 posizioni diverse.

Il numero di anagrammi di una parola o di un nome che ha N lettere che si ripetono una *m* volte, un'altra *n* volte , è dato da $P_N^{(m,n)} = \frac{N!}{m!n!}$, che è il numero di permutazioni di N elementi di cui *m* sono uguali tra di loro ed *n* sono anch'essi uguali. Ad es. per la parola CONCORSO, di N=8, si hanno le lettere C=2 e O=3, si avranno $P_8^{(2,3)} = \frac{8!}{2!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 3360$ che è il numero di anagrammi che si possono avere con detta parola.

Un altro esempio analogo è il seguente: **Si vuole sapere quante colonne si devono giocare al Totocalcio**, puntando esclusivamente sulla disposizione di pronostici di 4 pareggi (X), 5 vittorie della squadra ospitante (1), 4 vittorie della squadra ospite (2).

Poiché le colonne delle schedine debbono contenere quattro *x*, cinque 1 e quattro 2, ogni schedina differirà dalle altre solo per l'ordine in cui saranno posti i segni 1, x, 2; si devono quindi considerare le permutazioni di 13 elementi non tutti diversi, come detto sopra, precisamente $\frac{13!}{5!4!4!} = \frac{1x2x3x4x5x6x7x8x9x10x11x12x13}{1x2x3x4x5x1x2x3x4x1x2x3x4} = 90090$ che sono il numero di colonne da giocare.

Quando si fa un "brindisi" o se si gioca al lotto. Nel primo caso facendo toccare tutti i bicchieri, per ottenere il numero di rintocchi, se si è in *N* persone, bisogna calcolare le combinazioni di *N* elementi a due alla volta, cioè $C_{N,2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$, ad es. nel caso di *N=6*, si ha $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ pari al numero di suoni tra un bicchiere e l'altro.

A detta formula generale, cioè alla combinazione di *N* elementi ad *n* ad *n*, cioè $C_{N,n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$ sono legate anche le combinazioni che si hanno in vari giochi, ad es. quelli del lotto e del superenalotto. A tali propositi il metodo infallibile per vincere sicuramente alla lunga, che scaturisce dai calcoli matematici, è non giocare!

Infatti, introducendo la probabilità, nel modo più semplice, cioè come rapporto di combinazioni tra i casi favorevoli ed i casi possibili, dapprima si daranno le probabilità di fare estratto semplice e determinato, ambo, terno, quaterna, cinquina al lotto e tre, quattro, cinque e sei al superenalotto, calcolandone solo qualcuna a mo di esempio e quindi si daranno brevi spiegazioni sul gioco equo e non equo, questo ultimo penalizzante per il giocatore.

Per ottenere la probabilità di vincere un ambo su una singola ruota, si procede prima al calcolo dei casi favorevoli che sono tanti quanti sono le combinazioni binarie che si possono formare coi cinque numeri che verranno estratti, cioè $C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, poi al calcolo dei casi possibili, cioè delle combinazioni di 90 numeri di classe 2 sono $C_{90,2} = \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$. Quindi la probabilità di vincere è $\frac{10}{4005} = \frac{1}{400,5} \cong 0,25\%$ e perciò quella di non vincere è $\frac{399,5}{400,5} \cong 99,75\,\%$.

Se il gioco fosse equo lo Stato per la vincita di un ambo dovrebbe pagare l'inverso della relativa probabilità, 400,5 volte la posta; mentre, essendo il lotto un gioco non equo, perché destinato ad aumentare le entrate dell'Erario, paga qualcosa di meno di 250 volte la posta, tenuto conto anche delle ritenute di legge pari al 3%, che vengono detratte all'atto del pagamento delle vincite. Evidentemente per l'ambo lo Stato si avvantaggia sul giocatore proprio del rapporto $\frac{400,5}{(250 - 250 \cdot 0,03)} = \frac{400,5}{242,5} \cong 1,65$ volte. Dati per scontati gli analoghi calcoli delle probabilità si riportano i vantaggi dello Stato relativi alle altre giocate:

estratto semplice, $\frac{18}{(11,232 - 11232 \cdot 0,03)} \cong 1,65$; estratto determinato, $\frac{90}{(55 - 55 \cdot 0,03)} \cong 1,69$;

terno, $\frac{11748}{(4250 - 4250 \cdot 0,03)} \cong 2,85$; quaterna, $\frac{511038}{(80000 - 80000 \cdot 0,03)} \cong 6,58$;

cinquina, $\frac{43.949.268}{(1.000.000 - 1.000.000 \cdot 0,03)} \cong 45,31$. Si noti l'enorme progressione!

La giocata dell'ambo, la meno penalizzante con quella dell'estratto semplice, può essere all'incirca simulata con l'indovinare tra quattro assi coperti di un mazzo di carte "napoletane", qual è quello ad es. di danari, con evidente probabilità uguale a $\frac{1}{4}$. Provatevi a giocare alternativamente con altra persona (che simulerà lo Stato): in caso indovinerete voi l'asso di danari vi farete pagare 2,5 euro, nel caso che indovini l'altro voi pagherete 4 euro. Dopo alcune prove chi avrà vinto di più? Certamente l'altro giocatore! E così avviene per l'ambo ed ancora peggio per le altre giocate del lotto.

E che dire del superenalotto, per il quale i vantaggi dello Stato sono ancora più accentuati?

Si calcolerà solo il caso del "sei", per il quale i media fanno tanta propaganda… per l'elevato jackpot.

La probabilità che esca un "sei" con una sola colonna è data da $\dfrac{\binom{90-6}{6-6}}{\binom{90}{6}} = \dfrac{\binom{84}{0}}{\binom{90}{6}} = \dfrac{\dfrac{84!}{0!\cdot 84!}}{\dfrac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}} = \dfrac{720}{448.282.533.600} = \dfrac{1}{622.614.630}$, tenuto conto che 0!=1. Se si ferma l'attenzione sul denominatore della relativa probabilità si nota che esso ha una cifra dell'ordine dei centinaia di milioni che avvantaggia enormemente lo Stato, tenuto conto che lo stesso paga le vincite a seconda dell'entità del montepremi (già parecchio ridotto rispetto all'incasso delle giocate), sempre molto al di sotto delle cifre da gioco equo: per il sei dovrebbe pagare per ogni giocata vincente un numero di volte la scommessa per colonna (Euro 0,50) per quanto è il denominatore della probabilità! A titolo di curiosità si riportano di seguito i denominatori delle probabilità per il "tre" 326,71, per il "quattro" 11906,95, per il "cinque" 1.250.230,18 e per il "5+1" 103.769.105 che danno l'idea di quanto sia difficile vincere, anche se con la minima giocata di due colonne con 1 euro, dette cifre si dimezzano.

L'argomento di cui sopra si presta ad acquisire una mentalità probabilistica ed a mettere in guardia chiunque, in particolare gli studenti adolescenti anche da adulti, dal non giocare al lotto o al superenalotto.

"**Ogni numero primo, della forma 4k+1, con** $k \geq 1$**, è la misura dell'ipotenusa** di un triangolo rettangolo i cui cateti si esprimano pure con numeri interi; invece, ogni numero primo della forma 4k+3 non può esserlo".

Secondo la logica deduttiva quanto sopra andrebbe dimostrato, ma in mancanza di una dimostrazione basterà mettere alla prova tanto i numeri primi della forma 4k+1, cioè 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 101, 109, 113, …che quelli della forma 4k+3, cioè 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 103, 107, …. Infatti con quelli della forma 4k+1 avremo le terne di numeri pitagorici 5,3,4; 13,5,12; 17,8,15; 25,7,24; … ed ad es. anche il numero 4x34+1=137 che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti sono 88, 105.

Somma dei primi *n* numeri interi, dei quadrati e dei cubi dei primi *n* numeri interi.

Sono note le due formule

$$S_1 = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e}$$

$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = S_1 \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dette formule, sono state entrambe dimostrate e la loro autenticità può verificarsi con facili osservazioni geometriche sul numero dei quadratini pari a 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, …che costituiscono una metà dei rispettivi rettangoli che li contengono di area *n(n+1)*, per quanto attiene ad S_1 e sul numero dei cubetti di spigolo unitario che possono mettersi in relazione a $1^2 = 1$, $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, ….per quanto attiene ad S_2.

Si conclude con l'affermazione dimostrabile e verificabile che la somma dei cubi dei primi numeri interi è uguale al quadrato della somma di quei numeri: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

I chicchi di grano sulla scacchiera.

Narra la leggenda che l'inventore del gioco degli scacchi fosse un indiano e che alla richiesta di un compenso, del monarca suo signore, per l'invenzione avesse risposto di essere pago della quantità di grano che si ottiene collocando rispettivamente sulla prima, seconda, terza, sessantaquattresima casella della scacchiera 1, 2, 4, 8, …2^{63} chicchi di grano. Questa risposta fece ridere il monarca, ma la quantità di grano richiesta non è cosi' trascurabile…: richiederebbe diversi raccolti di tutta la Terra coltivata a grano. Infatti: 1+2+4+8+16+…+2^{62}+2^{63}= $1\dfrac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ chicchi di grano.

Il numero maggiore che si può scrivere con tre cifre non è 999, non è $\left(9^9\right)^9=9^{81}$, non è 9^{99}, ma è 9^{9^9}, cioè la potenza del 9 con esponente $9^9=387.420.489$, quindi è $9^{9^9}=9^{387.420.489}$. È stato calcolato che tale numero comprende 369.693.100 cifre; se una cifra scritta su un foglio occupa 4 mm, per scrivere un tale numero sarebbe necessario una striscia di carta lunga $369.693.100\cdot 4mm=1.478{,}7724Km$, ancora di più della distanza ferroviaria tra Roma e Parigi!

I numeri perfetti.

Un numero dicesi perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori, escluso il numero stesso.

E' noto che se $2^0+2^1+2^2+...+2^n=p$ è un numero primo, allora $p\cdot 2^n$ e' perfetto.

E' anche risaputo che se p e 2^p-1 sono due numeri primi, allora

$$2^{p-1}\left(2^p-1\right) \qquad (1)$$

e' un numero perfetto.

Non si conosce alcun numero perfetto dispari. I primi dodici numeri perfetti sono:

6, 28, 496, 8128, 33.550.336, 8.589.869.056, 137.438.691.328, 2.305.843.008.139.952.128,

che sono corrispondenti a p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127. Anche a p=521, 607, 1273 corrispondono altri tre numeri perfetti.

La verifica degli ultimi quattro dei dodici di cui sopra, veramente grandi, si affida ai lettori volenterosi, maggiore volontà…si richiede per il calcolo degli altri.

I primi quattro erano noti dall'antichità, degli altri, il quinto fu trovato in un manoscritto del 1461, ad Eulero erano noti il sesto, settimo ed ottavo nel 1772, il nono fu indicato da P. Seelhoff nel 1886, a partire dal decimo vennero calcolati da vari matematici nel secolo scorso ed ancora nel secolo ventunesimo c'è la corsa al calcolo di altri numeri perfetti.

Infine è dimostrabile che i numeri che si ottengono dalla (1), anche solo per p primo, divisi per 9 danno per resto 1, quindi tutti i numeri perfetti escluso il 6 hanno la somma ripetuta delle cifre uguale a 1: ciò si esprime con la congruenza $2^{p-1}\left(2^p-1\right)\equiv 1\ (\mathrm{mod.}9)$, che detta in breve vuol dire anche che la somma ripetuta delle cifre del numero che si ha dal primo membro è sempre uguale ad 1.

I numeri amici o amicabili e i numeri collega.

Due numeri interi si dicono amici o amicabili se ciascuno di essi è uguale alla somma dei divisori dell'altro, esclusi i numeri stessi. L'idea di tali numeri risale alla Scuola pitagorica, alla quale era nota la coppia 220, 284. Oggi ne sono note tantissime. Un metodo per calcolarle scaturisce dall'importante proprietà:

Se i tre numeri $a = 3 \cdot 2^n - 1,\ \ b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ \ c = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$ (1)

sono primi, allora i due numeri

$N_1 = 2^n \cdot ab$ e $N_2 = 2^n \cdot c$ (2)

sono amicabili. Oltre alle (2) esistono altre forme di numeri amicabili, che per la loro determinazione conduce ad un problema indeterminato, che non si tratterà.

A titolo di curiosità si riportano alcune coppie di numeri amicabili:

220, 284; 1184, 1210; 2620, 2924; 5020, 5564; 6232, 6368; 10744, 10856;
17296, 18416; 63020, 76084; 66928, 66992; 67095, 71145; 69615, 87633; 122265, 139815.

Si dicono numeri collega di grado n (n intero >1) due numeri tali che ognuno di essi sia uguale alla somma delle cifre dell'altro elevata alla potenza n .

Diamo due esempi di numeri collega del secondo e terzo grado, introdotti dallo matematico V. G. Cavallaro in $[3]$:

$169=(2+5+6)^2$; $256=(1+6+9)^2$
$6859=(2+1+9+5+2)^3$; $21952=(6+8+5+9)^3$.

-Il teorema di Eulero sui poliedri ed a parte una Sua soluzione curiosa sulla scacchiera.

S'intende per poliedro semplice un solido convesso senza "buchi", la cui superficie possa essere trasformata per deformazioni continue nella superficie di una sfera. Il poliedro è un solido la cui superficie è costituita da un certo numero di facce poligonali e nel caso dei cinque solidi regolari, detti platonici, tutti i poligoni sono uguali e così tutti gli angoloidi.

Indicando con F, V, S il numero rispettivamente delle facce, dei vertici, degli spigoli di un poliedro semplice, per il Teorema di Eulero, si ha sempre:

$$F + V = S + 2,$$

cosa che si riscontra in special modo nei cinque tipi di poliedri regolari platonici convessi dei quali riportiamo la seguente tabella:

Poliedri regolari convessi	**tetraedro**	**Cubo o esaedro**	**ottaedro**	**dodecaedro**	**icosaedro**
F=numero delle facce	**4 triangoli**	**6 quadrati**	**8 triangoli**	**12 pentagoni**	**20 triangoli**
V= numero dei vertici	**4**	**8**	**6**	**20**	**12**
S= numero degli spigoli	**6**	**12**	**12**	**30**	**30**
Teorema di Eulero F+V=S+2	**4+4=6+2**	**6+8=12+2**	**8+6=12+2**	**12+20=30+2**	**20+12=30+2**

La soluzione della questione curiosa sulla scacchiera data da Eulero è riportata nella seguente tabella che sarà brevemente commentata.

La questione: “Percorrere con un “CAVALIERE” tute le caselle della scacchiera senza tornare mai nella stessa casella e cominciando da una casella data”

42	**59**	**44**	**9**	**40**	**21**	**46**	**7**
61	**10**	**41**	**58**	**45**	**8**	**39**	**20**
12	**43**	**60**	**55**	**22**	**57**	**6**	**47**
53	**62**	**11**	**30**	**25**	**28**	**19**	**38**
32	**13**	**54**	**27**	**56**	**23**	**48**	**5**
63	**52**	**31**	**24**	**29**	**26**	**37**	**18**
14	**33**	**2**	**51**	**16**	**35**	**4**	**49**
1	**64**	**15**	**34**	**3**	**50**	**17**	**36**

A tale scopo Eulero collocò un gettone in ciascuna delle 64 caselle per le quali il CAVALIERE doveva passare eccezione fatta per quella dalla quale doveva partire, togliendo successivamente i gettoni delle caselle che attraversava.

Il lettore potrà farsi guidare dallo stesso Eulero, che consentirà ad un CAVALIERE, la cui mossa è un passo avanti in una qualsiasi direzione e uno a destra o a sinistra, di far compiere la marcia che risponde alle condizioni stabilite. Basterà seguire i numeri segnati nella scacchiera seguendo l’ordine naturale. Il lettore potrà cimentarsi nel partire da un’altra casella, ma dovrà riconoscere che è molto difficile trovare la via giusta!

-Un po’ di ALGEBRA, di TRIGONOMETRIA e di GEOMETRIA ANALITICA senza dover ricordare del tutto le formule.

Algebra. – Allo scopo di far toccare con mano agli studenti i casi di indeterminazione, di impossibilità, di determinazione, si riportano sinteticamente le quattro soluzioni possibili di una semplice equazione di primo grado data nella forma generale ax = b; la cui soluzione è x = b/a:

per a = b = 0 si ha 0x = 0 (ogni numero x moltiplicato per zero dà zero); x = 0/0 il caso è INDETERMINATO;

per a = 0, b $\neq$ 0 si ha 0x = $(b \neq 0)$ **(non c’è alcun numero x che moltiplicato per zero da‘ un numero diverso da zero) ; x =** $(b \neq 0)/0$ **caso IMPOSSIBILE;**

per a $\neq$ 0, b $\neq$ 0 si ha (a $\neq$ 0)x = $(b \neq 0)$ **(esiste sempre il numero che moltiplicato per un altro diverso da zero dà un numero diverso da zero);x =** $(b \neq 0)/(a \neq 0)$ **caso DETERMINATO;**

per a $\neq$ 0, b = 0 si ha (a $\neq$ 0)x = 0 (solo zero moltiplicato per un numero diverso da zero dà zero); x = 0/(a $\neq$ 0) caso nullo, anch’esso DETERMINATO.

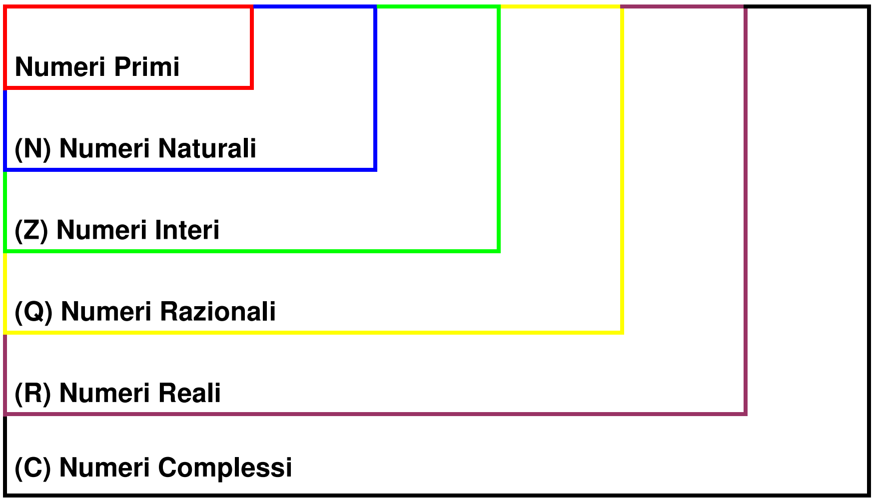
Nel caso si debba risolvere un’equazione di II grado incompleta del termine noto, cioè $ax^2 + bx$ **= 0, si procederà con uno sdoppiamento dell’equazione di II grado in due equazioni di I grado** $x(ax+b)=0$**, che per il principio dell’annullamento del prodotto dà le due soluzioni** $x_1 = 0$ e $ax_2 + b = 0;\ x_2 = b/a$ **.**

-La dimostrazione… di *2=1***.**
Ipotesi *a=b=1***, Tesi** *2=1*
*a=b***, si moltiplichino ambo i membri per** *a*

$a^2=ab$, si sottragga ad ambo i membri b^2
$a^2-b^2=ab-b^2$, che si può scrivere
$(a+b)(a-b)=b(a-b)$, da cui
$\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=b$, si sostituiscano i valori dell'ipotesi e si ha la tesi
$2=1$, come non dovevasi dimostrare, perché?
In quanto come riportato sopra, nel caso IMPOSSIBILE, non si può dividere per zero!

-Come presentare i NUMERI in maniera semplice.
Nei tempi antichi erano noti solo i numeri NATURALI, $N=\{1,2,3,...n\}$, con i quali era possibile eseguire somme ed alcune differenze, era impossibile eseguire la differenza, ad es. 3 – 5, per cui i matematici inventarono i numeri RELATIVI interi negativi che con i numeri NATURALI costituiscono $Z=\{...-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$,
Nell'impossibilità di poter dividere due numeri che non davano un intero, ad es. 5 : 2, inventarono i numeri che potevano mettersi sotto forma di frazione come $\frac{5}{2}$=2,5 che chiamarono RAZIONALI semplici, e quando i matematici si trovarono a dover dividere ad es. 5:3=1,666…=1,(6), osservando il risultato che dava infinite cifre decimali, a questi numeri dettero il nome di RAZIONALI periodici. L'insieme dei RAZIONALI semplici e periodici, detti anche solo RAZIONALI si indicano con Q o con $Q^{\pm}=\left\{...,-\frac{16}{4},...,-\frac{5}{2},...,-\frac{5}{3},0,...\frac{5}{3},...,\frac{5}{2},...,4,...\right\}$.
Quando i matematici si trovarono a dover estrarre particolari radici che davano come risultato NUMERI che non potevano essere messi sotto forma di frazioni, ad es. $\sqrt{2}$, a questi numeri dettero il nome di IRRAZIONALI, per cui questi numeri insieme ai RAZIONALI si chiamano REALI., che si indicano con la lettera $R^{\pm}$ o semplicemente R. A questo punto è evidente che i numeri RELATIVI possono essere non solo gli interi che si sono indicati con Z, ma anche i frazionari $Q^{\pm}$ e gli irrazionali che si indicano con $R^{\pm}\setminus Q^{\pm}$, cioè i reali meno i razionali. I numeri reali razionali sono tutti algebrici, quelli irrazionali possono essere algebrici o trascendenti, questi ultimi non sono soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti razionali, come ad es. i numeri $\pi, e, ecc.$

Infine, quando i matematici si trovarono a dover estrarre alcune radici con indici pari di numeri negativi, non esprimibili in termini reali dapprima stabilirono di chiamare UNITÀ IMMAGINARIA $\sqrt{-1}=i$, che gode delle proprietà: $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, valori che si ripetono di quattro in quattro, man mano che aumenta l' esponente. Quindi ai numeri formati da una parte reale e da una parte immaginaria dettero il nome di COMPLESSI che si indicano con la lettera *C*, cioè $a\pm bi$, con $a,b\in R$ e a due numeri $(a+bi),(a-bi)$ dettero il nome di complessi coniugati. Questi numeri COMPLESSI comprendono tutti gli altri numeri, e ci si può rendere conto di ciò se si osserva che per $b=0$, scompare la parte immaginaria e rimane solo quella reale.
Perciò si ha la catena d'inclusioni: $\{Numeriprimi\}\supset N\supset Z\supset Q^{\pm}\supset R^{\pm}\supset C$ e anche $C\subset R^{\pm}\subset Q^{\pm}\subset Z\subset N\subset\{Numeriprimi\}$.
Ecco un'immagine della successione degli insiemi numerici, in modo da favorire anche una memorizzazione visiva delle nozioni esposte:



-Ad evitare la risoluzione dell'equazione completa di II grado $ax^2+bx+c=0$**,** $\forall a,b,c \in Q$**, con la relativa formula (per chi non dovesse ricordarla), dopo aver reso unitario il coefficiente della** x^2**, cioè dividendo per** $a \neq 0$**, si ha** $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$**, dimezzando il coefficiente della** x**, si può porre** $x=y-\frac{b}{2a}$ **e procedere come nel seguente esempio:**

per risolvere $2x^2+36x-80=0$, prima si ha $x^2+18x-40=0$, **quindi ponendo** $x=y-\frac{18}{2}$**, da cui** $x=y-9$ **(1)**

si ha

$(y-9)^2+18(y-9)-40=0$ **;** $y^2-18y+81+18y-162-40=0$ **;**

$y^2=121$ e quindi $y_{1,2}=\mp\sqrt{121}=\mp 11$ **valori che sostituiti nella (1) danno le soluzioni**

$$x_1=-11-9=-20 \text{ e } x_2=11-9=2.$$

A conferma della bontà del metodo, se si segue il medesimo procedimento con l'equazione letterale di cui sopra , si ottiene proprio la formula risolutiva dell'equazione di II grado.

Si può ancora fare a meno dell'applicazione della formula risolutiva dell'equazione di II grado, essendo data $ax^2+bx+c=0$**, che per** $a \neq 0$**, avendosi** $p=\frac{b}{a}$ e $q=\frac{c}{a}$ **può essere riportata alla forma**

$x^2+px+q=0$, **(2)**

procedendo con alcuni passaggi si ha $x^2+px=-q$ **;** $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$ **;**

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}, \qquad \textbf{(3)}$$

Nel primo caso in cui $p^2-4q>0$**, ponendo** $\frac{p^2-4q}{4}$ **=k²****, si ha** $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ **- k² = 0, ovvero**

$\left(x+\frac{p}{2}+k\right)\left(x+\frac{p}{2}-k\right)=0$**, da cui, per il principio dell'annullamento del prodotto, si deducono le due soluzioni:** $x_1=-\frac{p}{2}-k$ e $x_2=-\frac{p}{2}+k$ **.**

Partendo dalla forma della (2) si riporta un esempio: sia data l'equazione

$x^2-7x+10=0$ **che si può scrivere** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}-10$**, ovvero** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$;

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$**, da cui** $\left(x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)=0$ **e quindi le due soluzioni:**

$x_1=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$ **e** $x_2=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$**.**

Nel secondo caso in cui $p^2-4q<0$**, l'equazione non ha soluzioni reali, avendo i due membri segno opposto per ogni x reale.**

Nel terzo caso in cui $p^2-4q=0$**, avendosi dalla (3)** $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$**, si hanno le due soluzioni coincidenti** $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$ **.**

Infine si riporta la dimostrazione della formula risolutiva dell'equazione completa di II grado, partendo dalla sua forma normale: $ax^2+bx+c=0$**.**

Moltiplicando i due membri per *4a* si ha l'equazione equivalente

$4a^2x^2+4abx+4ac=0$**, ed aggiungendo ad ambo i membri *b²***

$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2=b^2$**, trasportando il termine *4ac* nel secondo membro, si ha**

$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$**;** $(2ax+b)^2=b^2-4ac$**, estraendo la radice quadrata dai due membri si ottiene** $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$**, trasportando il termine *b* e dividendo i due membri per *2a* si ottiene la formula risolutiva:** $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **c. v. d.**

-Trigonometria. – Per ricavare tre gruppi di formule fondamentali si può procedere con altrettanti triangoli rettangoli ABC che hanno tutti l'angolo $B\hat{A}C=\alpha$**, ne segue:**

1^ gruppo, considerato il primo triangolo rettangolo che ha i due cateti e l'ipotenusa uguali rispettivamente a BC $=BC = sen\alpha,\ AC = \cos\alpha$ e A$B = 1$**, per il teorema di Pitagora si deducono le formule:**

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ ;\quad sen\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\ ;\quad \cos\alpha = \sqrt{1-sen^2\alpha}\ .$$

2^ gruppo, considerato il secondo triangolo rettangolo che ha i due cateti e l'ipotenusa rispettivamente uguali a $BC = tag\alpha,\ AC = 1$ e A$B = \sqrt{1+tag^2\alpha}$ **, per il Teorema dei triangoli rettangoli, si hanno:**

$$BC = AB\cdot sen\alpha, \text{ ovvero la formula } sen\alpha = \frac{tag\alpha}{\sqrt{1+tag^2\alpha}}\ ;$$

$$AC = AB\cdot \cos\alpha, \text{ ovvero la formula } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tag^2\alpha}}\ .$$

3^ gruppo, considerato il terzo triangolo rettangolo che ha i due cateti e l'ipotenusa rispettivamente uguali a $BC = 1,\ AC = ctg\alpha$ e A$B = \sqrt{1+ctg^2\alpha}$**, per il Teorema dei triangoli rettangoli, si hanno:**

$$BC = AB\cdot sen\alpha, \text{ ovvero la formula } sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}\ ;$$

$$AC = AB\cdot \cos\alpha, \text{ ovveo la formula } \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}\ .$$

Con un angolo $\alpha > 90°$ **si possono ottenere le formule, ricorrendo alle relazioni tra le funzioni di archi associati; per il segno del radicale si terra' presente in quale quadrante cade il lato estremo di** α**.**

-Geometria analitica. – Si parlerà brevemente delle coniche con richiami su retta, cerchio, ellisse, parabola, iperbole, facendo a meno dei grafici, che si demandano alla cortese solerzia del lettore.

Partendo da un punto dato $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ **di una retta r la cui equazione generale nella forma implicita è** $ax + by + c = 0$ **che si può scrivere nella forma esplicita**

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \qquad \textbf{(1)}$$

(si noti che il termine noto $-\frac{c}{b}$ **rappresenta l'intercetta della retta con l'asse delle y, cioè l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse delle *y*, infatti per** $x = 0$ **è** $y = -\frac{c}{b}$**) ovvero dalla (1) si ha** $\dfrac{y+\frac{c}{b}}{x-0} = -\dfrac{a}{b}$**, se si pensa come quella che congiunge il punto** $A \equiv \left(0, -\frac{c}{b}\right)$ **al punto generico** $P \equiv (x, y)$**, il cui coefficiente angolare è** $m = -\frac{a}{b}$ **che**

si ha da $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ che è il coefficiente angolare di *r* cioè la tangente trigonometrica dell'angolo α che la stessa retta forma con la direzione positiva dell'asse *x*.

Inoltre $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ è il coefficiente angolare della retta passante per P_1 e per il punto

$P_2 \equiv (x_2, y_2)$, la cui equazione è: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ovvero

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \textbf{(2)}$$

se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, cioè con i punti P_1 e P_2 non appartenenti ad una retta parallela agli assi; nel caso contrario l'equazione della retta risulta rispettivamente:

$y = y_1$ se parallela all'asse delle ascisse, essendo nella (2) $y_1 = y_2$;
$x = x_1$ se parallela all'asse delle ordinate, essendo nella (2) $x_1 = x_2$.

Il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro è la definizione della circonferenza.

Considerati un sistema di assi cartesiani ortogonali, sia $C \equiv (\alpha, \beta)$ il centro della circonferenza, $P \equiv (x, y)$ un suo punto generico, quindi $\overline{CP} = r$ è il raggio.

Dal Teorema di Pitagora, applicato ad ogni triangolo rettangolo *CAP*, con *A* piede di perpendicolare di *P* sul raggio parallelo all'asse x, si ha:

$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ che è l'equazione della circonferenza, la quale si semplifica, qualora il centro di essa cada nell'origine degli assi, così $\sqrt{x^2 + y^2} = r$; $x^2 + y^2 = r^2$.

Il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma $2a$ delle distanze da due punti fissi F_1, F_2, detti fuochi, è la definizione di un ellisse. Se si assumono come asse delle ascisse la retta che unisce i due fuochi e come origine degli assi il punto medio del segmento $F_1F_2 = 2c$ detta distanza focale, la condizione perché un punto $P(x, y)$ appartenga all'ellisse è: $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, somma di due ipotenuse dei triangoli rettangoli (*PQF₁* e *PQF₂* formati da *Q* piede di perpendicolare di *P* sull'asse *x*), ai quali applicando due volte il Teorema di Pitagora si ha $\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$;

$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$;

$c^2 + x^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + c^2 + x^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$ ed eliminando i termini

$c^2 + x^2 + y^2$ e ordinando $4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$; $cx + a^2 = a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$; cioè $c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 + 2a^2cx$; cioè:

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$,

$-c^2x^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = -a^2c^2 + a^4$,

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$,

sostituendo ad $a^2 - c^2$ **il suo valore** b^2**, dall'equazione fondamentale** $a^2 = b^2 + c^2$**, si ha** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$**, per cui dividendo ambo i membri per** a^2b^2 **si ha finalmente l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi, come coordinate:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$**.**

Il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice è la definizione della parabola.

Considerati un sistema di assi cartesiani ortogonali e l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate,

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

osservando che se si taglia con l'asse x, ponendo y = 0 , si trova una corda della curva perpendicolare all'asse di simmetria, si hanno le radici reali o immaginarie x_1, x_2 **di** $ax^2 + bx + c = 0$**, per cui l'ascissa del vertice *V* della parabola è:** $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$**,**

di conseguenza l'equazione dell'asse di simmetria è $x = -\frac{b}{2a}$ **e sostituendo nella (1) il valore della** x_v **si ha l'ordinata di *V* :** $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$

La (1) permette a seguire di scriversi:

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right); y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right); y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$**; da cui si ha** $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$**;** $y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$**; effettuando una traslazione degli assi, fino a portare l'origine nel punto** $V \equiv (x_v, y_v)$**, ponendo** $X = x - x_v = x + \frac{b}{2a}$**,** $Y = y - y_v = y + \frac{\Delta}{4a}$**, l'equazione della parabola assume la forma** $Y = aX^2; X^2 = \frac{1}{a}Y$ **, per cui indicando con** p **la distanza del fuoco dalla direttrice, si ha:**

$2p = \frac{1}{a}, p = \frac{1}{2a}, \frac{p}{2} = \frac{1}{4a}$ **e quindi il fuoco** $F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)$**.**

Dunque la parabola (1) incontra l'asse *x (y=0)* nei punti le cui ascisse sono le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ **e quindi, si hanno tre casi con** $\Delta >=< 0$ **rispettivamente con l'asse *x* secante la parabola in due punti distinti, con l'asse *x* tangente nel vertice della parabola nei due punti coincidenti, con l'asse *x* che non ha punti comuni con la parabola. Infine, con *a>0* la parabola è aperta e rivolta verso il semiasse positivo, con a<0 al contrario.**

Un esempio semplificato dovrebbe convincere che le formule possono essere anche dimenticate se ci si sforza di ricavarle:

Data la parabola ***y = x²* - *5x* + *6*, con *y* = *0*** **si ha** $x_1 = 2, x_2 = 3, x_v = \frac{5}{2}, y_v = -\frac{1}{4}, p = 1, F \equiv \left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Si definisce iperbole il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante, in valore assoluto, la differenza delle loro distanze da due punti fissi detti fuochi. Dal noto rettangolo circoscritto all'iperbole, con a, b **rispettivamente misure dei semiassi focale ed immaginario, sussiste la relazione fondamentale** $a^2 + b^2 = c^2$ **analoga a quella dell'ellisse.**

Passando alla ricerca dell'equazione dell'iperbole, si noti che se un generico punto $P(x, y)$ **appartiene all'iperbole di distanza focale** $\overline{F_1F_2} = 2c$ **ed essendo**

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a, \qquad \textbf{(1)}$$

siccome $PF_2 = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$ **e** $PF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ **, sostituendo detti valori nella (1), si ha**

$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$**;** $\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ **;**

$c^2 + x^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + c^2 + x^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ **cioè**

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$**,** $cx - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$**,**

$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2$**,**

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$ **e siccome per la relazione fondamentale è** $c^2 - a^2 = b^2$**, sostituendo detto valore si ha** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ **e dividendo ambo i membri per** a^2b^2 **si ha** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **, che è l'equazione canonica dell'iperbole di semiassi** ***a, b*** **.**

Nel caso dell'iperbole equilatera, essendo $a = b$**, l'equazione può scriversi** $x^2 - y^2 = a^2$ **.**

Conclusioni. - L'autore facendo tesoro dell'esperienza maturata in alcuni anni d'insegnamento della matematica nelle Scuole medie e superiori, ha esemplificato e richiamato alcuni argomenti, presentandoli con semplicità in maniera che possano servire ai fini didattici per stimolare ancor più l'interesse degli studenti e quindi essere validi per una effettiva assimilazione.

Lecce, 10/10/10

Bibliografia

[1]G. Aprile, V. Marseguerra, A. Pietrosanti, S. Villatico "MATEMATICHE COMPLEMENTARI" Voll. I e II. Edizioni Giorgio Baryes – Roma. 1959-1961.

[2]R. Giannarelli e B. Giannelli curatori e vari autori di "LA SCIENZA PER I GIOVANI" Supplemento di "ARCHIMEDE". Casa Editrice Felice Le Monnier – Firenze. Varie annate dal 1952 al 1962.
[3]V. G. Cavallaro. Organo "Schola et vita" dell'Accademia pro Interlingua, nn.4-5, Milano. 1931.
[4]G. Choquet "L'insegnamento della geometria". Feltrinelli Editore Milano. 1967.
[5]M. Pellerey "Progettazione didattica" Scuola viva/1. SEI – Torino. 1983.