RISOLTE LE CONGETTURE DI POLIGNAC (1849) E DI GOLDBACH (1772)?

Guido Carolla[1]

Sunto. Dopo aver presentato i quesiti delle relative congetture, l'autore tratta gli argomenti in modo semplice e con un po' di fantasia cerca di darne un'impronta divulgativa. Senza la pretesa di aver risolto definitivamente le due congetture, egli fa, come già accennato, un ragionamento, sia pure elementare, che risponde pienamente alla risoluzione dell'infinità dei casi possibili e può affermare che l'esposizione è coerente con i testi delle congetture di Polignac e di Goldbach; inoltre, alla fine l'autore riporta le due dimostrazioni, dando ad esse le connotazioni di teoremi. Un'Appendice sulle densità dei primi e sull'uguaglianza e diversità con i dispari chiude il lavoro. Le osservazioni fatte potranno servire per una didattica sicuramente viva atta ad interessare e coinvolgere i giovani discenti.

I due problemi sono rispettivamente i seguenti:
"Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi" (Polignac), che è una generalizzazione della congettura dei numeri primi gemelli che dice "esistono infinite coppie di numeri primi che si discostano solo di due unità";
"Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti" (Goldbach).

Ciò che rende le due congetture così attraenti non sembra, per ora, la prospettiva di un loro uso nelle soluzioni dei problemi del mondo reale, bensì la loro ricchezza, la loro bellezza e il loro mistero, la loro leggiadria matematica pura e semplice. Ancora oggi le congetture di Polignac e di Goldbach suscitano domande e supposizioni. Naturalmente le dimostrazioni mancanti sono un sogno per molti ricercatori e, per completezza di trattazione, si deve confessare che il ragionamento induttivo che segue altro non è che il prodotto d'osservazioni semplici, di sottile ricerca, ricco di fondamento logico-matematico.

Il secondo problema in particolare, anzi, noto come la congettura di Goldbach, un matematico tedesco conterraneo e quasi contemporaneo del filosofo Immanuel Kant, è di una semplicità disarmante: empiricamente è facilissimo riscontrare che 4=2+2, 6=3+3, 14=3+11=7+7 e così via. Ma nemmeno i più grandi geni della matematica sono mai riusciti a spiegare perché. Al punto che si è pensato potesse esservi una fenditura e che, con le grandi cifre e il rarefarsi dei numeri primi, vi fosse un'eccezione. Fra i pratici del calcolo si è così sfrenata una corsa per verificare cifre sempre più grandi, ma il rebus ha sempre mantenuto la sua inalterabilità. Ancora oggi non si è fatto alcun passo verso una rigorosa dimostrazione matematica, nemmeno i computer più moderni e superpotenti, programmati con particolari algoritmi, sono riusciti a dimostrare la veridicità o meno della congettura che è stata verificata per tutti i numeri pari fino a 400 mila miliardi.

Una posta in giuoco addirittura di un milione di dollari sarebbe stata versata a chi avesse dimostrato la congettura di Goldbach: a versare la ragguardevole cifra entro il 2002, ma non riscossa da alcuno, sarebbe stata la casa editrice britannica "Faber and Faber" che nel 2000 lanciò il romanzo, tradotto in venti lingue, per l'Italia tradotto dall'inglese da Ettore Capriolo, editrice Tascabili-Bompiani, "Lo zio Petros e la congettura di Goldbach", scritto dal regista greco-australiano Apostolos Doxiadis, ex docente di matematica, vincitore del festival cinematografico di Salonicco nel 1983 con un thriller di fantapolitica intitolato "Passaggio sotterraneo".

[1] Docente di Matematica e preside a. r. E-mail: guidocarolla@libero.it

Il presente articolo ha scopo divulgativo e viene presentato, in una forma e con esempi discorsivi, così da renderlo più accessibile e in modo che possa essere compreso da chi possegga le più elementari nozioni di aritmetica e della "teoria degli insiemi", diciamo uno studente del biennio di scuola secondaria (fatti salvi i pur comprensibili, perché brevi e semplici, riferimenti biologici). Iniziamo subito con il riferire che l'infinità dei numeri primi (quei numeri interi divisibili solo per sé stessi e per l'unità) fu dimostrata da Euclide[2].
Noi paragoneremo i numeri primi ad una popolazione sterminata di vertebrati marini, in particolare di pesci piccoli, medi e grandi in un immenso oceano che comprende anche tante altre specie di esseri viventi della fauna marina (protozoi, poriferi, celenterati, gasteropodi, lamellibranchi, crostacei, ecc.) e della flora marina (piante vascolari senza semi tra cui le alghe, gimnosperme con semi, angiosperme con semi e fiori, tra cui le posidonie note anche dalle nostre parti, ecc.), le quali ultime due specie della fauna e flora marina paragoneremo ai numeri naturali anch'essi infiniti con $n \in N=\{0,1,2,3,...\}$ (*n* appartenente all'insieme dei numeri naturali *N*), a meno dei numeri primi di cui sopra.

La congettura di Polignac

Veniamo al dunque per la congettura di Polignac "ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi", che è una generalizzazione della congettura dei primi gemelli "esistono infinite coppie di numeri primi che si discostano solo di due unità", primi gemelli (si chiamano gemelli due primi consecutivi la cui differenza è 2), che abbiamo paragonato ai pesci gemelli. Indicando con $2n$ ($n \in N_0$, *n* appartenente ai numeri naturali escluso lo zero) ogni numero pari e con *j, i* le unità rispettivamente di due qualunque numeri primi consecutivi, si può scrivere:

$$2n = Y \cdot 10 + j - (X \cdot 10 + i) \tag{1}$$

Le sole unità *i, j* possono essere utilizzate quando le $X,Y = 0$ e non potranno assumere il valore 2, ma solamente tre valori, cioè con $i, j \in \{3,5,7\}$, per cui la (1) dà 2 solo nei seguenti casi: $2 \cdot 1 = 2 = 5 - 3 = 7 - 5$.
Mentre, quando $X, Y \geq 1$ le unità potranno assumere solamente quattro valori cioè con $i, j \in \{1,3,7,9\}$, in quanto tra tutti i numeri dispari vi sono i numeri primi dall'11 in poi che terminano solo con una delle dette cifre 1, 3, 7, 9; appare evidente che, perché sia contemplata la congettura di Polignac che parla di differenza tra primi consecutivi, vi è un solo caso della (1) in cui la X=0 e la Y =1 e cioè $2 \cdot 2 = 4 = 1 \cdot 10 + 1 - (0 \cdot 10 + 7) = 11 - 7$. In tutti gli altri infiniti casi di primi consecutivi sarà sempre, come detto sopra, ($X, Y \geq 1$) e $i, j \in \{1,3,7,9\}$.

Simulando di andare a pesca nell'immenso oceano, da una prima piccola battuta di pesca possiamo avere il numero pari 2 pescando le due coppie di pesciolini le cui sole differenze tra primi consecutivi 5-3 e 7-5 danno proprio 2, dalle 16=4² (2-2,3-3,5-5,7-7,2-3,2-5,2-7,3-2,3-5,3-7,5-2,5-3,5-7,7-2,7-3,7-5) che sono le disposizioni con ripetizione dei quattro pesciolini (numeri primi,

---

[2] Euclide (IV sec. a. C.) dimostrò per primo che esistono infiniti numeri primi. La sua dimostrazione è la seguente: se 2, 3, 5, …, *p* fossero i soli numeri primi, potremmo costruire il numero $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p + 1$ il quale ha la proprietà di dare resto 1 quando è diviso per ciascuno di questi numeri primi. Poiché ogni numero maggiore di 1 è primo oppure divisibile per almeno un numero primo, la lista proposta non può essere completa. Ad es. se ipotizzassimo che 2,3,5,7 fossero i soli primi, costruendo il numero $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$, esso è primo non essendo divisibile per alcuno dei primi che lo precedono 2,3,5,7,11,…, fino a 103 (è superfluo provare a dividere 211 per i primi che seguono 107,109,…,199 in quanto è evidente che il quoziente è < 2). Ciò prova la primalità di 211 e l'esistenza di altri infiniti numeri primi, contro l'ipotesi formulata in questo esempio.

composti da una sola cifra) a due alla volta compresi nella prima decina di numeri naturali, cioè 2, 3, 5, 7: ovviamente ai fini della congettura di Polignac, come detto sopra, il numero primo 2 non verrà preso in considerazione.

Con una seconda battuta pescheremo tutte le altre coppie di pesci gemelli e non (la cui differenza tra primi consecutivi costituisce sempre ogni numero pari uguale o maggiore di 4); infatti, come già osservato che tutti gli infiniti primi maggiori di 10 possono solo avere quattro unità 1, 3, 7, 9, anche in questo caso dalle $4^2=16$ possibili disposizioni con ripetizione a due alla volta, avremo tre tipologie (per i numeri pari con le cadenze 2, 4, 6, 8), più quattro tipologie (per i numeri pari con cadenza zero) delle coppie di unità che soddisfano il problema, essendo fondamentale evidenziare che ogni numero pari, ad eccezione dello stesso pari 2 (che come già detto si ottiene anche dalle differenze di numeri primi di una sola cifra 5-3 e 7-5), si otterrà dalle differenze di due numeri primi consecutivi esclusivamente con minuendi e sottraendi le cui unità sono terne di coppie (per i pari con cadenze 2,4,6,8) e quaterne di coppie (per i pari con cadenza 0) che, non vi può essere alcun dubbio, <u>si ripetano all'infinito</u>, infatti avremo:
per 2, 12, 22, …, 102, 112, … la terna di coppie delle unità dei primi è costituita da 1-9, 3-1, 9-7;
(per gli esempi si veda la tabella CADENZE UNITA' 2, 4, 6, 8, 0)
per 4, 14, 24, …, 104, 114, … la terna di coppie delle unità dei primi è costituita da 1-7, 7-3, 3-9;
per 6, 16, 26, …, 106, 116, … la terna di coppie delle unità dei primi è costituita da 7-1, 3-7, 9-3;
per 8, 18, 28, …, 108, 118, … la terna di coppie delle unità dei primi è costituita da 9-1, 1-3, 7-9;
per 10, 20, 30, ..,110 .., la quaterna di coppie delle unità dei primi è costituita da 1-1, 3-3, 7-7, 9-9;
ecc.

Allo scopo di una verifica di quanto detto sopra riportiamo la tabella (con *n*=1,2,3,…che sono il numero dei pari compresi tra due primi, nel caso in esame, consecutivi) che compendia o riassume le infinite differenze delle coppie di numeri primi al di fuori delle quali non ve ne sono altre che abbiano diverse cifre di unità:

CADENZE	$2\cdot n$					OSSERVARE LE CADENZE (UNITA')
(UNITA')	I	(II	III	IV	V	)DELLA COLONNA I
2	2x1	(2x6	2x11	2x16	2x21	…)=2= 5-3=7-5=13-11=19-17=31-29=…
4	2x2	(2x7	2x12	2x17	2x22	…)=4=11-7=17-13=23-19=41-37=…
6	2x3	(2x8	2x13	2x18	2x23	…)=6= 29-23=37-31=53-47=…
8	2x4	(2x9	2x14	2x19	2x24	…)=8=97-89=409-401=751-743=…
0	2x5	(2x10	2x15	2x20	2x25	…)=10= 149-139=191-181=293-283=347-337=…

Le cadenze (unità) delle colonne I, II, III, IV, V, … si ripeteranno all'infinito salvo che per 5-3, 7-5; allo scopo di mettere in evidenza questo aspetto si riportano dei casi relativi alle colonne II, III,IV:

2	2x6			=12 = 211-199=223-211=479-467=…
4	2x7			=14 = 331-317=853-839=877-863=...
6	2x8			=16=1847-1831=2129-2113=4073-4057=…
8	2x9			=18=541-523=1087-1069=2179-2161=…
0	2x10			=20 =907-887=3109-3089=3433-3413=18481-18461=…
2		2x11		=22 =1151-1129=2333-2311=2579-2557=…
4		2x12		=24 =1693-1669=6761-6737=23497-23473=…
……		……		……
8		2x14		=28 =2999-2971=5147-5119=5981-5953=…
……			……	……
4			2x17	=34=1361-1327=10007-9973=34583-34549=…

e così via.

Infine, riportiamo altri pochi esempi (ma se ne possono fare un'infinità) che confermano quanto detto, le differenze 2, 4, 6, 8, 10 si hanno anche da: 2=43-41=61-59; 4=41-37=47-43=71-67; 6=59-53=67-61=79-73; 8=367-359=499-491; 10=251-241=…; ecc.

Per concludere, tanto l'infinità dei numeri primi e alcune sequenze di numeri composti[3] (che lasciano supporre di poter ottenere sempre ogni numero pari dalle differenze di due primi consecutivi[4]), quanto la densità dei primi che diminuisce lentamente man mano che i numeri diventano sempre più grandi, permettono di far pensare che possa essere soddisfatta la congettura di Polignac, ovvero che, come detto sopra, tutte le coppie interessate dei pesci (che abbiamo paragonato ai due numeri primi con le sole unità 3, 5, 7 e agli infiniti numeri primi a partire da quelli con almeno una decina con le unità 1, 3, 7, 9) siano state prese tutte in rete, con la simulata battuta di pesca. Perciò ci appare evidente che sia possibile toccare con mano le infinite coppie di numeri primi consecutivi, in riferimento alla congettura di Polignac che generalizza anche quella dei primi gemelli.

Con il descritto elementare procedimento si può affermare oltretutto la coerenza con la cosiddetta congettura di Polignac e con quella dei primi gemelli che dicono: "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi", generalizzazione della congettura dei numeri primi gemelli "esistono infinite coppie di numeri primi che si discostano solo di due unità". Quanto detto risponde ai perché e convalida l'asserto di Polignac? A nostro avviso la risposta è affermativa, se sulla "infinità" non si voglia smentire quanto detto nella nota 2 con la dimostrazione di Euclide, nella nota 3 con le sequenze dei numeri composti e sulla densità dei numeri primi, la quale ultima è trattata brevemente nell'APPENDICE.

La congettura di Goldbach

Venendo ora a Goldbach: "Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti", quanto segue può essere considerata una continuazione più giusta (sotto il profilo aritmetico) e a lieto fine del già citato romanzo "Lo zio Petros e la congettura di Goldbach", dopo che zio e nipote si fossero potuti recare a pesca…

Premettendo la relazione additiva (2), analoga a quella del precedente paragrafo, cioè

(2) $$M = Y \cdot 10 + j + (X \cdot 10 + i),$$ [5]

nella quale M sta per un qualunque numero pari >2, procediamo anche qui alla simulazione di alcune battute di pesca.

Nella seguente colonna riportiamo l'esito di una prima battuta di pesca nella quale siamo riusciti a prendere in rete i pesciolini, ovvero le particolari sette coppie costituite da quattro numeri primi di una sola cifra o di unità 2, 3, 5, 7, che consentono con le relative somme di ottenere i pari da 4 a 14.
$X, Y = 0 \rightarrow i, j \in \{2,3,5,7\}$

---

[3] Si adotterà $\forall a \in N$ la seguente successione *(a+2)!+2,(a+2)!+3,…,(a+2)!+(a+1),(a+2)!+(a+2)*; detti numeri divisibili per *2,3,…,(a+1),(a+2)* sono solo parte di tutti i composti (almeno *a+1*) (rispettivamente divisibili per 2, 3, …, (a+1), (a+2)), che vi sono tra i due numeri primi di ordine consecutivo. Chiariremo la successione con un esempio: se a=3, si avrà (3+2)!+2, (3+2)!+3, (3+2)!+4, (3+2)!+5; 5!+2, 5!+3, 5!+4, 5!+5; 1x2x3x4x5(cioè cinque fattoriale 5!=120)+2, 120+3, 120+4,120+5; 122, 123,124,125, i quali almeno quattro numeri (3+1=4), essendo rispettivamente divisibili per 2, 3, 4, 5 sono composti, insieme a 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121 e 126, in tutto tredici numeri composti esistenti tra i numeri primi 113 e 127.

[4] Si riportano due coppie di numeri primi gemelli:9857, 9859 ed una più grande calcolata nel 1998 che è $835335^{39014} \pm 1$

[5] Il caso particolare di *M=4* è contemplato nella formula quando *X,Y=0, j=2 e i=2*.

2+2=4
3+3=6
3+5=8
3+7=10
5+3=8
5+5=10
5+7=12
7+3=10
7+5=12
7+7=14

Nella seconda colonna riportiamo l'esito di una seconda battuta di pesca nella quale siamo riusciti a prendere in rete tutte le coppie (che si possono avere da 3x4=12) costituite dai tre pesciolini corrispondenti ai primi 3, 5, 7 di una sola cifra combinati in somme alle quattro unità (1, 3, 7, 9) degli infiniti altri pesci (dei numeri primi dall'11 in poi) presenti nell'immenso oceano.

$X=0 \rightarrow i \in \{3,5,7\}$ e $Y>0 \rightarrow j \in \{1,3,7,9\}$	Nei singoli righi, in parentesi, i corrispondenti numeri sottostanti da 24 fino a 76 non ci sono, ma sono presenti nelle parentesi sopra o sotto o in terza colonna
3+1=4 (14, 34, 44, 64, 74, …)	24, 54, 84, 94
3+3=6 (16, 26, 46, 56, 76, 86, …)	36, 66, 96
3+7=0 (20, 40, 50, 70, 100, …)	30, 60, 80, 90
3+9=2 (22, 32, 62, 82, 92, …)	42, 52, 72
5+1=6 (16, 36, 46, 66, 76, …)	26, 56, 86, 96
5+3=8 (18, 28, 48, 58,78, 88 …)	38, 68, 98
5+7=2 (22, 42, 52, 72, …)	32, 62, 82, 92
5+9=4 (24, 34, 64, 84, 94, …)	44, 54, 74
7+1=8 (18, 38, 48, 68, 78, …)	28, 58, 88, 98
7+3=0 (20, 30, 50, 60, 80, 90, …)	40, 70, 100
7+7=4 (24, 44, 54,74, …)	34, 64, 84, 94
7+9=6 (26, 36, 66, 86,96, …)	46, 56, 76

Infine, ricorreremo alla seguente terza colonna e quindi ad una terza battuta di pesca, nella quale siamo riusciti a prendere in rete tutte le coppie (che si possono avere da 4x4=16) costituite dalle quattro unità (1, 3, 7, 9) degli infiniti pesciolini (dei numeri primi dall'11 in poi), il cui esito potrà completare veramente tutti gli altri infiniti casi che si presenteranno.

$X, Y > 0 \rightarrow i, j \in \{1,3,7,9\}$

1+1=2 (22, 42, 52, 62, 72, 82,92,) non c'è 32, presente sopra (seconda colonna) in 3+9, sotto in 3+9
1+3=4 (24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94 …)
1+7=8 (28, 48, 58, 68, 78, 88,98,) non c'è 38, presente sopra (seconda colonna) in 7+1, sotto in 9+9
1+9=0 (30, 40, 50, 60, 70,80, 90,100, …)
3+3=6 (26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, …)
3+1=4 (24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, …)
3+7=0 (30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, …)
3+9=2 (32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, …)
7+7=4 (34, 54, 64, 74, 84, 94, …) non c'è44,presente sopra (seconda colonna 3+1,7+7)in 1+3 e 3+1
7+1=8 (28, 48, 58, 68, 78, 88,98,) non c'è 38, presente sopra (seconda colonna) in 7+1, sotto in 9+9
7+3=0 (30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, …)
7+9=6 (36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, …)
9+9=8 (38, 48, 58, 78, 88, 98, …) non c'è 68, presente sopra (seconda colonna 7+1) in 1+7 e 7+1
9+1=0 (30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,…)
9+3=2 (32, 42, 52, 62, 72, 82, 92,…)
9+7=6 (36, 46, 56, 66, 76, 86, 96,…)

Ci spieghiamo meglio con due degli infiniti esempi che si possono fare: se M=1440, i due addendi primi scaturiscono dalla decima coppia della seconda colonna (e non solo) in quanto si avrà 1440=0x10+7+143x10+3=7+1433; se invece M=2988 si dovrà ricorrere alla terza coppia della terza colonna (e non solo) per avere 2988=3x10+1+295x10+7=31+2957. E così via, per tutti gli infiniti altri numeri pari: non resta che provare con tutti gli esempi che si vogliono!

Si noti ancora che ferma restando la primalità degli addendi di cui sopra, le sole unità sono riportate anche nei valori delle somme fuori parentesi (eccetto che nella prima colonna) e, come già detto, con almeno una decina in parentesi, per cui anche ora sarà sempre possibile scrivere qualunque si voglia numero con le dieci cifre decimali.

Infatti, come si può notare, al variare delle X, Y e delle unità i, j si potrà sempre soddisfare la relazione riportata sopra con M al primo membro, anche per il fatto che all'aumentare dei numeri pari che figurano al primo membro di più sono i numeri primi che possono comparire come due addendi al secondo membro, essendo ciò la garanzia di trovare sempre almeno una coppia di primi, avendo preso in sole tre battute di pesca tutte le coppie di pesci che si dovevano pescare.

Anche per detta congettura appare evidente che il semplice riferimento aritmetico di cui sopra ci permette di considerare esauriente e affermativa la risposta al quesito stesso.

Con il descritto elementare procedimento si può affermare oltretutto la coerenza con la cosiddetta congettura di Christian Goldbach che dice: "Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti". Quanto detto sopra risponde al "perché è così" e convalida l'asserto di Goldbach? A nostro avviso le risposte sono affermative per le stesse ragioni esposte a proposito dell'asserto di Polignac.

Una più due (più una) dimostrazioni

Il numero dei "pari" n compresi tra due numeri primi p_h e p_k è dato dalla semidifferenza tra gli stessi

$$n = \frac{p_k - p_h}{2} \qquad (1)$$

Per chi ha l'esigenza si dà la dimostrazione per via deduttiva, partendo dall'ipotesi che tra i numeri primi p_h e p_k vi possano essere alcuni numeri naturali pari indicati con m_i, $i=1, 2, 3, ..., n$, infatti, si osserva che essi sono termini di una progressione aritmetica (di ragione $r=2$),della quale i termini estremi, cioè il primo e l'ultimo sono:

$$m_1 = p_h + 1, \quad m_n = p_k - 1. \qquad (2)$$

Essendo noto che in una progressione aritmetica di ragione $r=2$, il termine n.simo in funzione del primo termine è $m_n = m_1 + (n-1)\cdot r$, da questa si potrà ricavare $n = (m_n - m_1)/2 + 1$, nella quale sostituite le (2) si otterrà $n = (p_k - 1 - (p_h + 1))/2 + 1 = (p_k - p_h - 2)/2 + 1 = (p_k - p_h)/2$ e tale risultato dimostra la(1).

Il libro di David Wells "PERSONAGGI E PARADOSSI DELLA MATEMATICA"

I edizione Oscar Saggi Mondatori, marzo 2002, giunto nel 2006 alla ottava edizione, nelle pagine 267, 268 riporta il paragrafo in cui "Hardy parla della dimostrazione e di Ramanujan" e tra l'altro recita:
"Non è difficile avere delle intuizioni intelligenti; ci sono teoremi, come quello di "Goldbach", che non sono mai stati provati e che chiunque potrebbe indovinare."
Proprio questa frase ha dato all'autore la carica psicologica ad indagare su alcuni precedenti articoli, dai quali scaturiscono le dimostrazioni che seguono, che fanno perno sulla numerosità dei pari esistenti tra due primi.

Teorema di Goldbach. – "Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti".
Siano $\forall h,k \in N_0$ con $h \le k,\ \ n \in N,\ \ p_h, p_k \in \{p : p \text{ numero primo}\}$, $M \in \{m : m \text{ numero pari} > 2\}$. Tesi: $M = p_h + p_k$
Essendo per la (1) i pari n tra due primi qualunque p_h e p_k

$$n = \frac{p_k - p_h}{2},$$

si ha

$$2n = p_k - p_h,$$

si somma ad ambo i membri $2p_h$

$$2p_h + 2n = p_k - p_h + 2p_h,$$

si raccoglie 2 a fattore comune

$$2(p_h + n) = p_h + p_k,$$

avendosi al primo membro un numero pari, perché il doppio della somma tra un numero primo ed un naturale compreso lo zero, si potrà scrivere

$$M = p_h + p_k,$$

ciò, considerata l'infinità dei primi dovuta ad Euclide (IV sec. a. C.), (v. nota 2), prova l'asserto di Goldbach (1772): " Ogni numero pari >2 è somma di due numeri primi non necessariamente distinti".

Teorema di Polignac. – "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi", che comprende quello dei numeri primi gemelli (numeri primi consecutivi di differenza 2), cioè: "Il numero 2 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi".

Siano $\forall k \in N_0 \setminus \{1,2\}$, $n \in N_0$, $p_{k-1}, p_k \in \{p : p \text{ numero primo}\}$, $M \in \{m : m \text{ numero pari}\}$. Tesi: $M = p_k - p_{k-1}$
Essendo per la (1) i pari n tra due primi qualunque p_h e p_k

$$n = \frac{p_k - p_h}{2},$$

essendo in questo caso i due primi consecutivi, si potrà scrivere

$$n = \frac{p_k - p_{k-1}}{2},$$

dalla quale si ha

$$2n = p_k - p_{k-1},$$

essendo $2n$ un numero pari, si potrà scrivere

$$M = p_k - p_{k-1},$$

ciò, considerata l'infinità dei primi dovuta ad Euclide (IV sec. a. C.), (v. nota 2), prova l'asserto di Polignac (1849): "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi" e quella dei primi gemelli, "Il numero 2 è ottenibile come infinite coppie di numeri primi consecutivi".

Per concludere si riportano alcuni casi concreti delle due tesi, partendo da quelli più semplici con i primi più piccoli:

Da $M=2(p_h+n)=p_h+p_k$ GOLDBACH(1772)

$4=2(2+0)=p_1+p_1=2+2$

$6=2(3+0)=p_2+p_2=3+3$

$8=2(3+1)=p_2+p_3=3+5$

$10=2(3+2)=p_2+p_4=3+7$

$12=2(5+1)=p_3+p_4=5+7$

$14=2(3+4)=p_2+p_5=3+11$

....

Da $M=2n=p_k-p_{k-1}$ POLIGNAC(1849)

$2=2\cdot 1=p_3-p_2=5\text{-}3=p_4-p_3=7\text{-}5=p_6-p_5=13\text{-}11=\ldots$

$4=2\cdot 2=p_5-p_4=11\text{-}7=p_7-p_6=17\text{-}13=p_9-p_8=23\text{-}19=\ldots$

$6=2\cdot 3=p_{10}-p_9=29\text{-}23=p_{12}-p_{11}=37\text{-}31=p_{16}-p_{15}=53\text{-}47=\ldots$

$8=2\cdot 4=p_{25}-p_{24}=97\text{-}89=p_{73}-p_{72}=367\text{-}359=p_{78}-p_{77}=397\text{-}389=\ldots$

$10=2\cdot 5=p_{35}-p_{34}=149\text{-}139=p_{43}-p_{42}=191\text{-}181=p_{54}-p_{53}=251\text{-}241=\ldots$

$12=2\cdot 6=p_{47}-p_{46}=211\text{-}199=p_{48}-p_{47}=223\text{-}211=p_{92}-p_{91}=479\text{-}467=\ldots$

$14=2\cdot 7=p_{31}-p_{30}=127\text{-}113=p_{63}-p_{62}=307\text{-}293=p_{67}-p_{66}=331\text{-}317=\ldots$

....

Infine, ci piace sottolineare che lo scopo del presente articolo è anche quello di mettere in risalto come da un punto di vista didattico sia opportuno, non tanto propinare agli alunni direttamente formule o leggi più o meno complicate, quanto fornire agli stessi dei mezzi di osservazione che possano condurli ad intravedere o scoprire le leggi medesime.

APPENDICE

SULLA DENSITA' DEI NUMERI PRIMI

A prima vista si direbbe che i numeri primi siano distribuiti tra i numeri interi quasi a caso. Per esempio nei 100 numeri immediatamente prima di 10.000.000 ci sono 9 primi, mentre nei 100 numeri dopo ve ne sono solo 2. Però, su larga scala, il modo in cui i primi sono distribuiti è molto regolare. Legendre e Gauss fecero entrambi estesi calcoli della densità dei primi. Gauss (che era un calcolatore prodigioso) disse ad un amico che ogni qualvolta egli aveva una quindicina di minuti liberi la passava a contare i primi in una "ciliade" (gruppi di 1000 numeri). Verso la fine della sua vita, si stima che egli avesse contati tutti i primi fino a 3 milioni. Sia Legendre che Gauss arrivarono alla conclusione che per un grande n la densità dei primi vicino a n e' di circa 1/log(n), intendendo per log(n) il logaritmo naturale di n. Legendre diede una stima per π(n) il numero di primi $\leq$ n di

$\pi(n) \cong n/(\log(n) - 1.08366)$,

mentre la stima di Gauss è in termini dell' *integrale logaritmico*

$\pi(n) \cong \int_2^n (1/\log(t)\, dt.$

L'n.simo primo è $p_{\pi(n)} \cong n \cdot \log(n)$,

che scaturisce dall'affermazione che la densità dei primi è 1/log(n), nota come il *Teorema dei Numeri Primi*. Tentativi di dimostrarlo continuarono per tutto il diciannovesimo secolo, con notevole progresso fatto da Chebyshev e Riemann che fu anche capace di correlare il problema a qualcosa chiamata l'*Ipotesi di Riemann* : un risultato ancora non provato degli zeri nel piano Complesso di qualcosa chiamata la funzione-zeta di Riemann. Il risultato venne in seguito dimostrato (usando i metodi potenti dell'analisi complessa) da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896.

COMPARAZIONE DEI NUMERI DISPARI CON I PRIMI

Potrebbe apparire che la formula (1) dell'ultimo paragrafo sia pertinente a tutto l'insieme dei numeri dispari: ciò non è affatto vero. Infatti, esaminando le due successioni, nelle quali si è indicato con d_r quella dei numeri dispari e con $p_{\pi(n)}$ quella dei primi, sono riscontrabili tutte le uguaglianze e le diversità:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23… n	$n = 2r - 1,\ r = \frac{n+1}{2}$
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	$d_{12} \cdots d_r = d_{((n+1)/2)}$	
2												
p_1	p_2	p_3	p_4		p_5	p_6		p_7	p_8		$p_9 \cdots\ p_{\pi(n)} \cong n \cdot \log(n)$	$\pi(n) \cong \frac{n}{(\log(n) - 1{,}08366)}$

Fatte le eccezioni per 1, il minore dei dispari, per 2, il minore dei primi e per i numeri 3, 5, 7 che hanno gli stessi indici, tutti gli altri si distinguono bene, avendo essi indici diversi e ovviamente diverse sono anche le formule per i calcoli dei numeri in questione e degli indici. Infatti, è possibile ottenere un qualunque primo in funzione del corrispondente indice che ha lo stesso come numero dispari:

$$p_{\pi(n)} = d_r = 2r - 1, \text{ es. } p_8 = d_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 19.$$

Infine, indicando con *n*, come già fatto nell'articolo, il numero dei pari esistenti rispettivamente tra due dispari o tra due primi, $\forall h,k, \text{con } h \leq k, \text{ con } h,k \in N_0, \text{ con } n \in N$, si calcolerà

$$d_k = d_h + 2n$$

e $\forall h,k, \text{con } h \leq k, \text{con } h,k \in N_0 \setminus \{1\}, \text{con } n \in N$ si calcolerà

$$p_k = p_h + 2n.$$

Anche per i numeri dispari è possibile dare delle dimostrazioni analoghe, ma sostanzialmente diverse rispetto a quelle riportate nell'ultimo paragrafo per i numeri primi.

Il numero dei "pari" *n* compresi tra due numeri dispari d_h e d_k è dato dalla semidifferenza tra gli stessi

$$n=\frac{d_k-d_h}{2} \qquad (1')$$

Per chi ha l'esigenza si dà la dimostrazione per via deduttiva, partendo dall'ipotesi che tra i numeri dispari d_h e d_k vi possano essere alcuni numeri naturali pari indicati con m_i, $i=1, 2, 3, ..., n$, infatti, si osserva che essi sono termini di una progressione aritmetica (di ragione $r=2$),della quale i termini estremi, cioè il primo e l'ultimo sono:

$$m_1=d_h+1, \quad m_n=d_k-1. \qquad (2')$$

Essendo noto che in una progressione aritmetica di ragione $r=2$, il termine n.simo in funzione del primo termine è $m_n=m_1+(n-1)\cdot r$, da questa si potrà ricavare $n=(m_n-m_1)/2+1$, nella quale sostituite le (2') si otterrà $n=(d_k-1-(d_h+1))/2+1=(d_k-d_h-2)/2+1=(d_k-d_h)/2$ e tale risultato dimostra la(1').

Prop. 1 – "Ogni numero pari è somma di due numeri dispari non necessariamente distinti".

Siano $\forall h,k\in N_0$ con $h\le k,\ n\in N,\ d_h,d_k\in\{d : d \text{ numero dispari}\},\ M\in\{m : m \text{ numero pari}\}$. Tesi: $M=d_h+d_k$

Essendo per la (1') i pari n tra due dispari qualunque d_h e d_k

$$n=\frac{d_k-d_h}{2},$$

si ha

$$2n=d_k-d_h,$$

si somma ad ambo i membri $2d_h$

$$2d_h+2n=d_k-d_h+2d_h,$$

si raccoglie 2 a fattore comune

$$2(d_h+n)=d_h+d_k,$$

avendosi al primo membro un numero pari, perché il doppio della somma tra un numero dispari ed un naturale compreso lo zero, si potrà scrivere

$$M=d_h+d_k,$$

ciò, considerata l'infinità dei dispari, dimostra la Prop. 1: " Ogni numero pari è somma di due numeri dispari non necessariamente distinti".

Prop. 2 – "Il numero 2 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri dispari consecutivi".

Siano $\forall k\in N_0\setminus\{1\},\ n\in N_0,\ d_{k-1},d_k\in\{d : d \text{ pnumero dispari}\},\ M\in\{m : m \text{ numero pari}\}$. Tesi: $2=d_k-d_{k-1}$

Essendo per la (1') i pari n tra due dispari qualunque d_h e d_k

$$n=\frac{d_k-d_h}{2},$$

che per i due dispari consecutivi, si potrà scrivere

$$n=\frac{d_k-d_{k-1}}{2},$$

per cui si ha $1=\frac{d_k - d_{k-1}}{2}$,

dalla quale si ha $2 \cdot 1 = d_k - d_{k-1}$,

cioè $2 = d_k - d_{k-1}$,

ciò, considerata l'infinità dei dispari, prova l'asserto : "Il numero 2 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri dispari consecutivi".

Prop.3 - "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri dispari anche non consecutivi", che comprende quella dei numeri dispari consecutivi.

Della quale, considerata la parziale non consecutività (in Polignac, si parla solo di primi consecutivi), non si daranno la ovvia dimostrazione, ma solo le premesse e la tesi.

Siano $\forall h \in N_0$, $\forall k \in N_0 \setminus \{1\}$, $n \in N_0$, $M \in \{m, numeri\ pari\}$. Tesi: $M = d_k - d_h$.

Le Proposizioni 1, 2 e 3, ovvie nel loro contenuto, dimostrano tutte le uguaglianze e le diversità con quelle dei primi e ciò avvalora le dimostrazioni date, che hanno origine dalla semplice osservazione sulla numerosità dei numeri pari che è comune a due primi escluso il 2 ed a due dispari qualunque.

BIBLIOGRAFIA

Carolla G., "Formula $p_k = p_h + 2 \cdot n$ dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)" in www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", a seguito comunicazione in Congresso Nazionale della Mathesis di Vico Equense (NA), località Seiano – 3,4,5,6 Novembre 2003. Pubblicato anche su www.desmatron.altervista.org/number_theory/goldbach.php

Carolla G., "Considerazioni su tre congetture matematiche (II parte)" pubblicato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti". 2003.

Carolla G., "Considerazioni su alcune congetture matematiche" inviato per la pubblicazione sul Periodico di matematiche, Organo della Mathesis Società di Matematica e Fisica. Ottobre 2003.

Carolla G., " I numeri primi di Fibonacci sono infiniti?", pubblicato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti". 2004.

Carolla G.-Maggiore F., "Dimostrazioni per deduzione e per induzione", pubblicato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. 2005.

Carolla G., Una nota sull'articolo "Formula ... dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)", pubblicato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti". 2006.

Lecce, 26/03/2007