**Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario:**

***Durata massima della prova: 6 ore.*** *È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema*

## PROBLEMA 1

Sia $f$ la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico $G$ di $f$.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca $G$ in due punti distinti e le regioni finite di piano $R$ e $S$ che essa delimita con $G$. Precisamente: $R$ delimitata dall'asse $y$, da $G$ e dalla retta $y = c$ e $S$ delimitata da $G$ e dalla retta $y = c$.
3. Determinate $c$ in modo che $R$ e $S$ siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di $G$ con la retta $y = c$;

4. determinate la funzione $g$ il cui grafico è simmetrico di $G$ rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$

## PROBLEMA 2

$ABC$ è un triangolo rettangolo di ipotenusa $BC$.

1. Dimostrate che la mediana relativa a $BC$ è congruente alla metà di $BC$.
2. Esprimete le misure dei cateti di $ABC$ in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza a essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono $\boldsymbol{K}$ di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di $\boldsymbol{K}$.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti e in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono $\boldsymbol{K}$.

## QUESTIONARIO

1. Trovate due numeri reali $a$ e $b$, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera a esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in *(1, 3)* e un minimo relativo in *(-1, 2)*.
4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.
5. Di una funzione $g(x)$ , non costante, si sa che:
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$
Trovate una espressione di g(x).
6. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente $a$, $b$ e $\delta$. Quale è il valore di $\delta$ che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
9. Calcolate: $\int_0^1 arcsen\, x dx$
10. Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?


**Sunra Mosconi**, Politecnico di Milano
**Niccolò Desenzani**, Università degli Studi di Milano


**Problema 1**

1) Il dominio di $f$ è tutto $\mathbb{R}$ e $f$ è continua, dispari e infinitamente derivabile. Per i limiti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

Gli zeri di $f$ sono: $0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Gli zeri della derivata $f'(x) = 2 - 9x^2$ sono $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ che individuano rispettivamente i valori di massimo e di minimi relativo: $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}) = \pm\frac{4}{9}\sqrt{2}$. La derivata seconda $f''(x) = -18x$ ha il segno di $-x$. Da queste informazioni si ottiene il grafico in figura in cui sono indicate le porzioni di piano di cui al punto 2).

3) Sia $F(x) = x^2 - \frac{3}{4}x^4$ una primitiva di $f(x)$. Posti, per ogni $0 < c < \frac{4}{9}\sqrt{2}$, $a$ e $b$ le ascisse delle intersezioni fra $G$ e la retta $\{y = c\}$ si ha

$$\begin{cases} Area(R) = ac - F(a) \\ Area(S) = F(b) - F(a) - (b-a)c \end{cases};$$

imponendo $Area(R) = Area(S)$ si ottiene $F(b) = bc$. Mettendo allora a sistema con la condizione $f(b) = c$ si ha

$$\begin{cases} 4b - 3b^3 = 4c \\ 2b - 3b^3 = c \end{cases};$$

sottraendo la seconda equazione alla prima, si ottiene $2b = 3c$. Utilizzando la seconda equazione del sistema con $c = \frac{2}{3}b$ si ottiene $b = \pm\frac{2}{3}, 0$, di cui solo la soluzione positiva è significativa. Quindi abbiamo $b = \frac{2}{3}$ e $c = \frac{4}{9}$. Per trovare $a$ è sufficiente dividere il polinomio $f(x) - \frac{4}{9}$ per $x - \frac{2}{3}$ ottenendo $f(x) - \frac{4}{9} = -(x - \frac{2}{3})(3x^2 + 2x - \frac{2}{3})$. Le soluzioni del secondo fattore sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$$

di cui solo la soluzione positiva è significativa e pertanto $a = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$.

4) La funzione $g$ è data da

$$g(x) = -(f(x) - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}.$$

**Problema 2**

1) Essendo $ABC$ rettangolo, l'ipotenusa è il diametro del cerchio circoscritto e il punto medio dell'ipotenusa il suo centro. Ne segue che la mediana è pari al raggio che a sua volta è pari a metà dell'ipotenusa.



2) Essendo $ABC$ rettangolo e detto $H$ il piede dell'altezza relativa a $BC$ si ha

$$Area(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}.$$

Per il Teorema di Pitagora $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$ si ha

$$(AB - AC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB \cdot AC = (BC)^2 - 2BC \cdot AH$$
$$(AB + AC)^2 = (BC)^2 + 2BC \cdot AH.$$

Prendendo le radici e sommando e sottraendo le due relazioni, detti $AC$ e $AB$ i cateti rispettivamente maggiore e minore, segue che

$$AC = \frac{\sqrt{(BC)^2+2BC \cdot AH}+\sqrt{(BC)^2-2BC \cdot AH}}{2}$$
$$AB = \frac{\sqrt{(BC)^2+2BC \cdot AH}-\sqrt{(BC)^2-2BC \cdot AH}}{2}.$$

3) Possiamo supporre di ruotare il triangolo attorno ad $AB$. Il volume del cono $K$ ottenuto sarà quindi

$$Vol(K) = \frac{1}{3}\pi(AC)^2 \cdot AB = \frac{1}{3}\pi\left[3 - (AB)^2\right] \cdot AB.$$

Sfruttando il fatto che la funzione $f(x) := \frac{1}{3}\pi(3 - x^2)x$ assume il suo valore massimo sul semiasse positivo solo in $x = 1$, si ha che il cono cercato è ottenuto mediante rotazione attorno ad $AB$ del triangolo avente $AB = 1$ e $AC = \sqrt{2}$ e il suo volume è di $\frac{2}{3}\pi(\text{metri})^3 = \frac{2 \cdot 10^3}{3}\pi$litri.

4) Lo sviluppo piano della superficie laterale di $K$ è un settore del cerchio di raggio $BC = \sqrt{3}$metri. L'arco di cerchio sotteso dall'angolo del settore è pari alla circonferenza di base di $K$ e misura quindi $2\pi AC = 2\sqrt{2}\pi$metri. La misura in radianti $\theta$ dell'angolo si ottiene dal rapporto con la circonferenza totale:

$$\frac{2\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{3}\pi} = \frac{\theta}{2\pi}$$

che dà $\theta = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$rad. Ricordando che $\pi$ radianti equivalgono a $180°$, si ottiene che $\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360°$.

**Questionario**

1) Scegliendo, ad esempio, $b = 3$ si ha $3a = 3 + a$ e quindi $a = \frac{3}{2}$. In generale, scelto $b \neq 0, 1, 2$ si ha che $a = \frac{b}{b-1}$ soddisfa le condizioni.

2) Detti $R$ e $h$ rispettivamente il raggio di base e l'altezza del cilindro, si ha che $R = \frac{h}{2}$ essendo il cilindro equilatero. Il raggio $r$ della sfera circoscritta è pari a $\sqrt{R^2 + (h/2)^2} = \sqrt{2}R$. La superficie totale del cilindro è $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$, mentre quella della sfera è $4\pi r^2 = 8\pi R^2$. Il rapporto fra le due aree è dunque $\frac{3}{4}$.



3) Supponendo $f$ continua, la cerchiamo fra i polinomi di terzo grado (quelli di secondo non possono avere sia un massimo che un minimo). Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Imponendo che la derivata si annulli nei punti 1 e $-1$, si ottiene che $b = 0$. Calcolando la derivata seconda, si ottiene $f''(x) = 6ax$ ed imponendo $f''(1) < 0$ e $f''(-1) > 0$ otteniamo $a < 0$. Scegliendo quindi $a = -1$ e imponendo il passaggio per $(1, 3)$ e $(-1, 2)$ si ottiene

$$\begin{cases} -1 + c + d = 3 \\ 1 - c + d = 2 \end{cases}$$

da cui $c = \frac{3}{2}$ e $d = \frac{5}{2}$. La funzione cercata è dunque $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Se non si richiede la continuità di $f$ allora la funzione che vale costantemente 2 ad eccezione che nel punto $x = 1$, dove la si pone uguale a 3, soddisfa le richieste.

4) È sufficiente osservare che $f(x) = e^x + 3x$ ha derivata $f'(x) = e^x + 3 > 3$; quindi, essendo monotona, $f$ ha al più uno zero. Osservando che $f(0) = 1$ e $f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0$ e applicando il Teorema del Valor Medio si ottiene la tesi.

5) Sia

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases},$$

$g$ non è costante non essendo nemmeno continua.

6) Per le proprietà dei logaritmi

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3\log 2x = 3\log 2 + 3\log x = 3\log 2 + f(x),$$

quindi $f$ e $g$ differiscono per la costante $3\log 2$ ed hanno perciò la stessa derivata: $3/x$.

7) Detto $T$ il triangolo del testo si ha $Area(T) = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\delta$ che assume valore massimo quando $\sin\delta$ è massimo, ossia per $\delta = \frac{\pi}{2}$.

8) L'ampiezza di un angolo espressa in radianti è pari alla lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo nella circonferenza unitaria. Il grado sessagesimale è la $360^{ma}$ parte dell'angolo giro, mentre il grado centesimale ne è la $400^{ma}$.

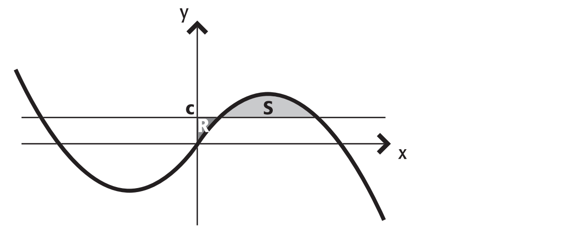
9) Osservando che $\int_0^1 \arcsin x dx$ è l'area sottostante al grafico di $\arcsin x$ con $x$ fra 0 e 1, si ha che esso è anche uguale all'area della porzione di piano delimitata dall'asse $x$, dalla retta $\{x = 1\}$ e dal grafico di $\sin y$. Detto quindi $R$ il rettangolo $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, si ha

$$\int_0^1 \arcsin x dx = Area(R) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = \frac{\pi}{2} - 1.$$

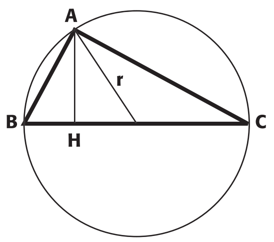
10) Le applicazioni possibili sono $3^4 = 81$, di cui nessuna iniettiva.

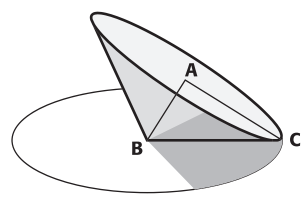


**Problema 1**




**Problema 2**




**Quesito 9**