Algoritmo ricorsivo per il calcolo di π
(basato sul metodo di Niccolò CUSANO)

Sommario: *viene illustrato un algoritmo (vedi [En]) per il calcolo approssimato di π basato sul metodo di CUSANO, per il quale partendo da un poligono regolare formato da $2^2 = 4$ lati (quadrato) si considerano poligoni regolari successivi al quadrato con un numero crescente di lati formati cioè da 2^n lati con n =, 3, 4, 5….. che approssimano sempre di più il loro perimetro alle circonferenze dei due cerchi concentrici, uno inscritto nel poligono preso in considerazione e l'altro circoscritto al suddetto poligono.*

Si consideri un poligono regolare di 2^n lati avente un perimetro di lunghezza uguale a 2.
Chiamati con r_n ed R_n i raggi rispettivamente del cerchio inscritto nel poligono e del cerchio che lo circoscrive è evidente che il perimetro del poligono risulta maggiore di $2\pi r_n$ e minore di $2\pi R_n$
Si ha pertanto $2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n$ da cui isolando π si ottiene :

$$\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{R_n}$$

Partendo da n = 2 si ha $2^n = 4$ (il poligono considerato è un quadrato)
Chiamati r_2 il raggio del cerchio inscritto nel poligono ed R_2 il raggio del cerchio che lo circoscrive

Si ricava facilmente $r_2 = \frac{1}{4}$ e $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (1)

Prendendo quindi in esame i poligoni regolari successivi con un numero 2^n sempre più elevato di lati (ottagono, esadecagono, ecc….) aventi lunghezza del perimetro sempre uguale a 2, e iniziando dalle formule indicate in (1) relative al quadrato si può dimostrare che per l'ottagono valgono le due seguenti relazioni:

(raggio del cerchio inscritto nell'ottagono) $r_3 = \frac{r_2 + R_2}{2}$ (2)

(raggio del cerchio circoscritto all'ottagono) $R_3 = \sqrt{r_3 + R_2}$ (3)

Si osservi che nella relazione (3) compare il termine r_3. Si possono così eseguire in modo iterativo, (vale a dire con un loop), le due seguenti grandezze:

$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \qquad (4)$$

$$R_{n+1} = \sqrt{r_{n+1} + R_n} \qquad (5)$$

per n = 3, 4, 5, 6, ... dove n è l'esponente del numero 2^n dei lati dei poligoni regolari che approssimano sempre di più il loro perimetro alle circonferenze dei due cerchi concentrici, uno inscritto nel poligono preso in considerazione e l'altro circoscritto al suddetto poligono.
Si è pertanto realizzato un opportuno programma (nel presente caso in linguaggio Qbasic) atto a determinare il valore di π con un adeguato seppur limitato numero di cifre decimali esatte dopo la virgola.
Si fa osservare che nel listato del programma l'istruzione riguardante la formula (4) deve precedere nella esecuzione l'istruzione relativa alla formula (5)
I valori iniziali saranno poi quelli illustrati in (1) (cioè quelli relativi al quadrato), valori che in linguaggio Qbasic diventano ri = 1 / 4 e R = SQR(2) / 4
Nella pagina seguente viene riportato il listato in Qbasic del programma preposto al calcolo ricorsivo per il valore di π. Viene riportato anche il risultato dei valori ottenuti avendo eseguito nel loop 26 iterazioni.

```
CLS : DEFDBL A-Z
ri = 1 / 4: R = SQR(2) / 4: n = 2 :'condizioni iniziali
PRINT
DO: n = n + 1
    ri = (R + ri) / 2
    R = SQR(R * ri)
    vd  = 1 / R :  ` valore per difetto di pi greco
    ve  = 1 / ri : ` valore per eccesso di pi greco
  PRINT "  2^"; n; "="; 2 ^ n; "lati",vd , ve
LOOP UNTIL n = 28
END
```

I valori numerici ottenibili in aritmetica a doppia precisione con il suddetto programma sono quelli elencati qui di seguito

poligono di 2^ n lati	vd = valore per difetto di pi greco	ve = valore per eccesso di pi greco
2^ 3 = 8 lati	3.061467458920718	3.313708498984761
2^ 4 = 16 lati	3.121445152258052	3.182597878074528
2^ 5 = 32 lati	3.136548490545939	3.151724907429256
2^ 6 = 64 lati	3.140331156954753	3.144118385245904
2^ 7 = 128 lati	3.141277250932773	3.142223629942456
2^ 8 = 256 lati	3.1415138011443	3.141750369168966
2^ 9 = 512 lati	3.14157294036709	3.141632080703181
2^ 10 = 1024 lati	3.141587725277159	3.141602510256808
2^ 11 = 2048 lati	3.141591421511199	3.141595117749588
2^ 12 = 4096 lati	3.141592345570117	3.141593269629306
2^ 13 = 8192 lati	3.141592576584872	3.141592807599643
2^ 14 = 16384 lati	3.141592634338562	3.141592692092253
2^ 15 = 32768 lati	3.141592648776985	3.141592663215407
2^ 16 = 65536 lati	3.14159265238659	3.141592655996196
2^ 17 = 131072 lati	3.141592653288992	3.141592654191393
2^ 18 = 262144 lati	3.141592653514592	3.141592653740192
2^ 19 = 524288 lati	3.141592653570992	3.141592653627392
2^ 20 = 1048576 lati	3.141592653585092	3.141592653599192
2^ 21 = 2097152 lati	3.141592653588617	3.141592653592142
2^ 22 = 4194304 lati	3.141592653589498	3.141592653590379
2^ 23 = 8388608 lati	3.141592653589718	3.141592653589938
2^ 24 = 16777216 lati	3.141592653589773	3.141592653589828
2^ 25 = 33554432 lati	3.141592653589786	3.1415926535898
2^ 26 = 67108864 lati	3.14159265358979	3.141592653589794
2^ 27 = 134217728 lati	3.141592653589791	3.141592653589792
2^ 28 = 268435456 lati	3.141592653589791	3.141592653589791

Il valore di π risulta essere stato calcolato con 14 cifre esatte dopo la virgola.
Non deve stupire avere trovato uno stesso valore numerico convergente per **1 / R** e per **1 / ri** ; ciò è da imputare alla limitazione di precisione di calcolo dovuta all'uso della doppia precisione, non avendo preso in considerazione una aritmetica a precisione più elevata.

RIFERIMENTO

[En] Arthur Engel - *mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique,* Chapitre 3: Géométrie
EDITION CEDIC - 1979