15 OTTOBRE 2008

$0^0 = 1$, inequivocabilmente

(a cura di Gaspero Domenichini)

Oggetto: motivazioni a favore dell'accettazione della definizione "0°=1".

Struttura del lavoro:

Ho messo una numerazione all'inizio di ogni periodo, in modo da semplificare eventuali rimandi ad affermazioni non chiare.

15 OTTOBRE 2008

Presentazione del lavoro

0.1 - In un precedente documento ho proposto di rendere "patrimonio comune" la definizione di "prodotto di n fattori, con n naturale" (che ho chiamato "prodotto esteso"):

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \quad = \quad 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad .$$

0.2 - So che lo scoglio di accettare che $0^0 = 1$ rappresenta una grossa difficoltà, e ciò vale anche per l'accettazione del "prodotto esteso", perché da quest'ultimo segue inequivocabilmente che $0^0 = 1$.

0.3 - Credo che l'UMI consideri priva di significato (o una forma indeterminata) l'espressione 0^0 , mentre io credo che $0^0 = 1$ sia una naturale conseguenza della definizione di potenza, senza bisogno di alcuna specificazione.

0.4 - Con questo lavoro mi propongo, appunto, di dare sufficienti motivazioni a favore di tale scelta e di far vedere che le motivazioni prodotte a sostegno delle posizioni contrarie (almeno quelle che conosco io) sono inconsistenti.

0.5 - Ho diviso il lavoro in tre parti: la prima dedicata alle definizioni, la seconda al "problema del limite" e la terza alle applicazioni, alle conclusioni e a considerazioni varie.

0.6 - Nella prima parte ci sono diverse definizioni di potenza naturale di un numero reale. Dove necessario ho dato le motivazioni delle scelte fatte e, alla fine di ogni definizione, ho riportato un commento complessivo.

0.7 - Sono solito "farcire" le mie argomentazioni con considerazioni di carattere "metamatematico", ma, sebbene per me siano fondamentali (addirittura la parte più importante delle mie ricerche), le tengo ben separate dalle considerazioni puramente matematiche, soprattutto quando, come in questo caso, devo argomentare le mie tesi a un pubblico che non conosco. Se ci sono argomentazioni di questo tipo, generalmente lo faccio presente anche con espressioni virgolettate, quali: "secondo me", "per la mia esperienza", ecc.

0.8 - Ho cercato di criticare le idee che reputo sbagliate e se il mio linguaggio, in qualche punto, dovesse essere risultato poco elegante, me ne scuso a priori; comunque garantisco che è mia intenzione criticare solo le idee, non le persone.

0.9 - Invito i coraggiosi e disponibili lettori di questo lavoro a non cercare solo conferme a quello che "si sa a priori essere vero", ma a chiedersi davvero se la definizione di 0^0 non sia "naturale".

0.10 - E se trovano che alcune mie affermazioni sono inesatte, ma non del tutto sbagliate, chiedo anche di aiutarmi a correggerle, evidenziando la "parte di verità" che c'è.

1ª Parte: le definizioni di 0°

1ª Definizione (nota la definizione di “prodotto esteso”):

1.1 a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a.

COMMENTO

1.2 La definizione è così bella (sintetica) che “potrebbe” essere di per sé sufficiente a farla accettare.

2ª Definizione (non nota la definizione di “prodotto esteso”):

2.1 $a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$ (cioè a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a).

COMMENTO

2.2 - È la definizione precedente, ma senza il prerequisito di conoscere il “prodotto esteso”, è quindi solo leggermente “più lunga”. Io preferisco sicuramente la prima. Questo per la sintesi, non solo per la concisione. Infatti la prima prevede di avere un concetto di “prodotto” molto più “di base” e più profondo, e permette di conoscere le potenze in modo diretto, senza intermediazione. La seconda ..., beh, è solo una definizione elegante che “funziona molto bene”.

3ª Definizione (utilizzabile in 1ª superiore, in condizioni “standard” e con una didattica “standard”):

3.1 Siano $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora

3.2 se n >1 si definisce $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$ (cioè a^n è il “prodotto di n fattori uguali ad a ”);

3.3 si dimostra banalmente che valgono le proprietà
1ª) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, 2ª) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ e 3ª) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

3.4 Si vuole poi estendere la potenza anche agli altri numeri naturali, cioè a 0 e 1, e lo si fa richiedendo che valgano le tre proprietà di sopra, secondo il principio di permanenza delle proprietà formali.

3.5 Non conoscendo il valore di a^1, ma volendo che valga la 1ª), si pone $a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$, da cui segue che, se $a \neq 0$, l'uguaglianza è vera se e solo se si definisce $a^1 = a$ (segue banalmente dalla definizione), mentre se $a = 0$ l'uguaglianza è vera per ogni valore di a^1. "Naturalmente" non c'è motivo di dare definizioni diverse nei due casi, perché è più che logico definire $a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$. (In realtà se ponessi $0^1 = p \neq 0$ avrei che $0^1 \cdot 0^1 \neq 0 = 0^2$, cioè non varrebbe la 2ª proprietà).

3.6 Si dimostra che, con la definizione data sopra, continuano a valere le proprietà 1ª) e 2ª) e 3ª).

3.7 Poi, non sapendo il valore di a^0, ma volendo che valga la 1ª), richiedo che $a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n$, da cui segue che, se $a \neq 0$, l'uguaglianza è vera se e solo se si definisce $a^0 = 1$ (segue banalmente dalla definizione), mentre se $a = 0$ l'uguaglianza è vera per ogni valore di a^1. "Naturalmente" non c'è motivo di dare definizioni diverse nei due casi, perché è più che logico definire $a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (confronta con la conclusione del punto 3.5).

3.8 Si dimostra che, con la definizione data sopra, continuano a valere le proprietà 1ª) e 2ª) e 3ª).

3.9 Dopo aver definito a^n su tutto $\mathbb{R}$, si dimostra che, con tale definizione di a^n, vale anche la 4ª) $(n \geq m \ \wedge \ a^m \neq 0) \ \Rightarrow \ a^n : a^m = a^{n-m}$.

COMMENTO

3.10 Questa "3ª definizione" è decisamente meno elegante delle precedenti, ma ricalca davvero da vicino ciò che si fa usualmente, mettendo in evidenza che non c'è motivo logico che obblighi a rinunciare alla definizione di 0^0, nemmeno se si procede nel modo "usuale". Tutte le argomentazioni che, procedendo in modo simile a sopra, ma che portano a contraddizioni, mi sono risultate sempre affette da errori "grossolani".

3.11 Faccio infine notare che (escludendo le considerazioni sul limite di x^x, che sono decisamente "successive" alla definizione di potenza NATURALE di un numero reale) la maggioranza delle argomentazioni contrarie alla definizione di $a^0 = 1$ si basa sul fatto che sembra "equivalente" definire $a^0 = 1$ oppure $a^0 = 0$, perché (per quanto la seconda possa sembrare cervellotica) entrambe verificherebbero tutte le proprietà delle potenze.

3.12 Questo però non è del tutto vero. Infatti, se si estende l'esponente agli interi relativi, vale anche la proprietà 5ª) $a^n \neq 0 \ \Rightarrow \ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Poiché $0 = -0$ se fosse $a^0 = 0$ si avrebbe che $a^{-0} = a^0 = 0$, il che rende falsa la 5ª). Invece, OVVIAMENTE, con $a^0 = 1$ il tutto ha significato ed è "elegante": $0 = -0 \ \Rightarrow \ a^{-0} = \dfrac{1}{a^0} = \dfrac{1}{1} = 1 = a^0$.

4ª Definizione (in ambito insiemistico):

4.1 Le operazioni elementari sono definite anche in ambito insiemistico, anzi (secondo me) lo sono concettualmente prima che in ambito aritmetico.

4.2 Se a e b sono le cardinalità di due insiemi (finiti) A e B, sono definite la somma di a e b (se A e B sono disgiunti è la cardinalità dell'unione di A e B, cioè $a+b=\#(A\cup B)$), il loro prodotto (è la cardinalità del prodotto cartesiano di A e B, cioè $a\cdot b=\#(AXB)$) e la potenza (è la cardinalità dell'insieme delle funzioni da B in A, cioè $a^b=\# A^B$).

4.3 I valori delle operazioni in questo ambito sono gli stessi di quello aritmetico, e qui $0^0=1$, e non mi risulta che sia mai stato messo in discussione.

COMMENTO

4.4 I commenti mi sembrerebbero superflui: $0^0=1$.

4.5 Forse, però, potrebbe essere interessante valutare quale dei due ambiti è più "di base", cioè più significativo, per cercare le verità più profonde.

4.6 Inoltre possiamo utilizzare l'ambito insiemistico, per far chiarezza anche in ambito non insiemistico. Infatti $a^b=\# A^B\Rightarrow a^0=\# A^{\emptyset}$ cioè $a^{\cdot}$ è la cardinalità dell'insieme delle funzioni dall'insieme vuoto in A. È chiaro che non è un concetto intuitivo per chi non ha una formazione (o mentalità) matematica, ma è altresì ovvio che l'insieme vuoto è una funzione dal vuoto in qualunque insieme A , SIA ESSO VUOTO O NO. Evidentemente, se accettiamo la definizione (quindi che il vuoto sia un insieme valido), non c'è alcuna differenza fra $\cdot^{\cdot}$ e $a^0,\ a\neq 0$, rendendo immotivata la scelta $a\neq 0$ nella definizione di $a^0=1$.

4.7 Quanto detto al punto precedente può aiutare a rendere più chiaro quanto esposto sotto, al punto 6.4.

2ª Parte: il problema del limite

5.1 Finalmente si affronta quella che credo sia l'unica argomentazione con qualche fondamento, cioè che quando z tende a 0, $z^0\rightarrow 1$ e $0^z\rightarrow 0$.

5.2 Come prima cosa faccio un'osservazione ovvia, addirittura banale, ma significativa: il "problema del limite", quando si dà la definizione di "potenza naturale", semplicemente non si pone, dal momento che l'insieme dei valori della base può essere anche continuo, ma quello dell'esponente è discreto. Quindi, se ci riferiamo alla definizione di "potenza naturale di un numero reale", si ha sicuramente che $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} y^x=1$, da cui segue ancora una volta $0^0=1$.

5.3 Ci sono, comunque, altre differenze importanti fra la base e l'esponente. Consideriamo la funzione y^x non definita nell'origine e cerchiamo come estenderla a quel punto. Consideriamo tale funzione ristretta ad $x=0$: abbiamo che la funzione y^0 è definita su tutto $\mathbb{R}_0$; quindi la definizione $0^0=1$ ne farebbe una funzione continua SU TUTTO $\mathbb{R}$. Poi consideriamo y^x ristretta ad $y=0$: abbiamo la funzione 0^x definita solo su $\mathbb{R}_0^+$, e la definizione $0^0=0$ la estenderebbe solo ad un punto senza che l'insieme di definizione cambi "significativamente"...

5.4 Anzi, tale estensione le farebbe perdere la "simmetria" per cui $y^x \cdot y^{-x}=1$. Cioè la funzione, lungi da migliorare sensibilmente, a mio avviso, sarebbe addirittura "più brutta". Invece con $0^0=1$ anche la proprietà $y^x \cdot y^{-x}=1$ è verificata per ogni (x,y) del campo di esistenza.

5.5 Traduco in un altro linguaggio: $\lim_{y\to 0} y^0=1$ ed è un limite "vero", mentre $\lim_{x\to 0^+} 0^x=0$ è solo il limite destro. Sono entrambi "limiti" e quindi sono "equivalenti" , ma non è vero che "i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali", perché quello sinistro non esiste (ho scoperto che questo, per molti colleghi, è una grave "irregolarità"). Comunque, in pratica, il primo limite è "più significativo". Inoltre (il concetto si formalizza male, ma è intuibile) definire $0^0=0$ "sbilancia" la funzione, la rende "non simmetrica".

5.6 Resta il fatto che, nonostante sia vero che $\lim_{y\to 0} y^{f(y)}=\lim_{x\to 0} f(x)^x=1$ per ogni funzione polinomiale f infinitesima non identicamente nulla, la funzione y^x nell'origine ha un punto di discontinuità non eliminabile.

5.7 Ma non ne vedo la gravità. Ci sono moltissime funzioni discontinue, di vario tipo. Per esempio, si consideri la funzione "parte intera di x", che è discontinua su tutti gli interi. Con un approccio analogo a quello che porta a non definire 0^0 , dovrei definirla solo sui reali non interi, ottenendo una funzione continua. Ma non mi risulta che qualcuno si sia mai sognato di farlo per renderla continua, "perché non lo è intrinsecamente".

5.8 Anzi: io trovo che non definire $0^0=1$ renda "più difficile" capire come è fatta y^x in un intorno dell'origine, dove è "prodigiosa".

5.9 E comunque non riesco davvero a vedere alcun effetto negativo "pratico" di questa "estensione discontinua". Qualcuno può farmene qualche esempio, magari di applicazioni che si perdono definendo $0^0=1$? Invece, per avere idea di cosa si acquista, vedi sotto, nei punti 6.7 e 6.8

5.10 Esprimo quindi la mia tesi, che può apparire "semplicistica", ma che invece è solo "semplice":
la funzione y^x è discontinua nell'origine degli assi.

3ª Parte: ulteriori considerazioni

6.1 Lasciando $0^0=1$ abbiamo definito la potenza naturale di un numero reale; cioè di QUALUNQUE numero reale, con QUALUNQUE esponente naturale . Gli insiemi di definizione non sono solo "più ampi di quelli della definizione classica", ma sono "integri", cioè non hanno bisogno di precisazioni e non possono essere estesi "di poco". Questo, a mio parere, migliora la definizione in modo sostanziale, considerando anche che TUTTE le proprietà delle potenze restano valide. E se invece consideriamo le potenze di numeri naturali si ottiene una OPERAZIONE, cioè la potenza naturale di numeri naturali è una operazione nei naturali (anche se non ha le classiche proprietà: associativa, commutativa ed esistenza dell'elemento neutro).

6.2 Tutte le estensioni dei valori dell’esponente a numeri non naturali sono concettualmente posteriori a questa definizione e portano “INEVITABILMENTE” a restrizioni per il valore della base, ma vengono DOPO, e qui hanno scarsa importanza.

6.3 Per esempio, $a^{-n},\ n \in \mathbb{N}$ è definita solo per $a \neq 0$, il che implica che $a^n,\ n \in \mathbb{Z}$ è definito solo nell’insieme $\mathbb{R}_0$. Però a nessuno verrebbe in mente, per questo motivo, di non definire le potenze positive di 0. E se si estende l’esponente all’insieme dei reali, la base deve appartenere all'insieme dei reali positivi ... ma le potenze naturali restano definite anche per i negativi.

6.4 C'è anche l'aspetto semantico del concetto, che non è secondario: se la potenza è “il prodotto di n fattori uguali ad a”, che differenza potrà mai esserci fra il prodotto di 0 fattori uguali ad 1, uguali a 3 o uguali a 0? È lo stesso concetto per cui un insieme, che ha per elementi solo un punto, è diverso da uno che ha per elementi solo una retta, ma un insieme di 0 punti è esattamente uguale a un insieme di 0 rette. Confrontate, in proposito, il punto 4.6

6.5 Faccio poi notare che con queste definizioni si elimina anche un errore tipico “nel linguaggio degli studenti” (e non solo), che generalmente dicono: « a^n si ottiene moltiplicando “ a ” per sé stesso n volte», invece, con la “vecchia” definizione, si moltiplica solo n-1 volte. Con il “prodotto esteso”, a^n è effettivamente il prodotto di n fattori uguali ad a, e si ottiene moltiplicando 1 n volte per a.

6.6 Le applicazioni del concetto $0^0=1$ sono molteplici; sotto, pur non potendo essere esauriente, ne commento alcune.

6.7 Credo che in ogni ambito, dove può avere un significato il simbolo 0^0, il suo valore debba essere necessariamente 1. Questo succede, per esempio, in tutte quelle che si possono chiamare “formule di Taylor” (dove compare l'espressione $(x-x_0)^0$, valutata in x_0).

6.8 La definizione di $0^0=1$ deriva direttamente dal concetto di “prodotto di n fattori, con n naturale”, per cui il prodotto di 0 fattori è necessariamente 1. Questa cosa ha almeno tre aspetti: uno riguarda il linguaggio (la sinteticità e la chiarezza delle definizioni, delle dimostrazioni, ecc, come visto sopra in molti punti), un altro riguarda il significato di prodotto privo di fattori (come già visto sopra, per esempio al punto 6.4) e un altro riguarda le molte applicazioni pratiche di tale concetto (come presentato nel documento “Proposta di una feconda definizione di prodotto”, nei punti dal 23 al 29).

6.9 Chi dovesse valutare se definire o meno 0^0 dovrebbe partire da una posizione neutrale. Se invece a priori sa già o che 0^0 non è definito, oppure che $0^0=1$, può darsi che non riesca a valutare oggettivamente la situazione e che si lasci fuorviare dal suo pregiudizio.

6.10 Però, mentre è naturale supporre che $\cdot^{\cdot}$ abbia significato (e magari che il suo valore sia quello che viene dalle definizioni precedenti, cioè 1, perché $a^0=1$), avere il concetto che « 0^0 non è definito» è una posizione “pregiudiziale” (se non ci sono motivi fondati “a priori” per escluderlo). Ed è davvero difficile non lasciarsi condizionare dall'idea “gratuita” (come idea a priori) che « 0^0 non può essere definito perché è intrinsecamente “una forma indeterminata”». Cioè io credo che il percorso naturale sia: parto dall'idea che il concetto debba essere definito sull'insieme massimo possibile $(\mathbb{N})$ e che venga ristretto solo se si presentano contraddizioni, o “ineleganze”.

6.11 Per valutare correttamente se e come definire l’espressione 0^0, si dovrebbe procedere come se non conoscessimo “niente”, senza pregiudizi. Allora non riesco davvero a vedere alcuna cosa che mi induca anche solo a mettere in dubbio che $0^0=1$. Infatti, “comunque” definisca la potenza naturale (almeno nei quattro modi sopra riportati), non si trova motivo per non definirlo. Se così non fosse, fatemi presente quale dei punti sopra esposti ne “sconsigli” la definizione; e, qualora se ne trovi qualcuno, dite anche se, in confronto al resto, la cosa è significativa.

6.12 A qualcuno può venire il dubbio: “sia che definisca $0^0=1$, sia che consideri 0^0 non definito, le due posizioni sono equivalenti, perché in entrambi i casi non trovo contraddizioni”. Però dovrebbe essere evidente la differenza fra le due posizioni. Infatti, anche se non definissi qualunque altra espressione (per esempio $1^0,\ 3^0,\ 8^2,\ 5+5,\ \ldots$), mi accorgerei di non trovare, comunque, contraddizioni. Invece ha tutt’altro significato il fatto che un’estensione dell’insieme di definizione risulti coerente e conservi TUTTE le proprietà formali: infatti, ovunque si abbia tale situazione, siamo di fatto autorizzati ad estendere tale insieme.

6.13 Ovviamente bisogna essere sicuri “nel concreto” (cioè nell'esperienza pratica) di non dare definizioni che siano intrinsecamente contraddittorie. Non so se può “far testo”, però io ho “sempre” (almeno, negli ultimi 30 anni) considerato $0^0=1$ senza mai aver avuto, per questo, problemi di coerenza logica. Aggiungo che mi considero molto critico con le mie definizioni: per motivi di coerenza o di linguaggio, ne ho riformulate molte, a volte cambiandole, altre volte adattandole (senza dovermene mai “pentire”), ma $0^0=1$ si è sempre confermata come “verità” assoluta e questa definizione, lungi da evidenziarmi contraddizioni, a volte mi ha aiutato a interpretare, e far interpretare, situazioni per molti “sfuggevoli”. Per esempio, è stata fondamentale per farmi arrivare al concetto di “prodotto esteso”.

6.14 Mi farebbe davvero piacere ricevere critiche argomentate alla definizione di cui sopra, perché, secondo me, non è una mia definizione (cioè non è una definizione “inventata”), ma l’ho trovata come “verità” e sarei felice di poterci vedere ancora più chiaramente. Per chi non fosse del tutto convinto da questo lavoro, a richiesta posso, comunque, ampliare quanto riportato sopra.

6.15 Per contattarmi, potete scrivermi all’indirizzo e-mail: gasperod@gmail.com, o scrivere nella filiera da me aperta nel forum di BASE Cinque: Prodotto di n fattori, con n naturale .

Ringrazio per la disponibilità.

Lucca, 15 ottobre 2008 Gaspero Domenichini