ELEMENTI DI MECCANICA RELATIVISTICA.

Appunti a cura del prof. Nicola SANTORO.

La teoria della relatività si occupa, come è noto, dei fenomeni fisici che avvengono in presenza di velocità molto elevate, comparabili a quella della luce nel vuoto. Dal punto di vista storico, come la meccanica quantistica, ha avuto origine dall'impossibilità a dimostrare alcune evidenze sperimentali, sulla base delle sole leggi della meccanica classica e dell'elettromagnetismo classico (basato sulle equazioni di Maxwell), e rappresenta, come la meccanica quantistica (ancora una volta), uno dei momenti di elevata sintesi del pensiero fisico-matematico del ventesimo secolo. Nel seguito saranno esposti, in maniera sintetica, i concetti basilari[1] *della "relatività ristretta", sottolineando l'importanza delle trasformate di Lorentz, ed analizzando le principali conseguenze in ambito cinematico (oltre a quelle in ambito dinamico, con l'introduzione della massa relativistica).*

Introduzione. Verso la fine del 1800 si pensava che lo spazio fosse composto di *etere* e che i corpi celesti (stelle, pianeti, comete, ecc.) che lo popolavano si muovessero attraverso l'etere senza disturbarlo.

Questa supposizione tornava particolarmente comoda per spiegare il moto della luce nello spazio, interpretato come propagazione delle vibrazioni dell'etere cosmico, con meccanismo analogo a quello della propagazione delle onde sonore nell'aria. Si conosceva anche la velocità della luce[2] ($c \cong 299792458\, m \cdot s^{-1}$) e le origini elettromagnetiche di essa (che le equazioni di Maxwell avevano rivelato).

Ora, assumendo l'etere come stazionario e sede di un riferimento cartesiano assoluto (terna fissa), se la terra si muoveva attraverso di esso senza interferirvi, secondo le leggi della meccanica classica, la velocità della luce rispetto alla terra avrebbe dovuto dipendere dalla direzione di propagazione (ad esempio, sarebbe dovuta essere pari a $c + v$ per un raggio luminoso propagantesi in direzione opposta al moto terrestre, $c - v$ per la stessa direzione, $\sqrt{c^2 - v^2}$ per direzione perpendicolare al moto della terra; dove v indica la velocità di traslazione dovuta al moto di rotazione terrestre). Naturalmente, la verifica di questo avrebbe costituito la prova dell'esistenza dell'etere, che i sostenitori della teoria corpuscolare della luce ponevano in dubbio. Si escogitarono perciò varie esperienze per questa verifica, e finalmente, nel 1881, gli americani Michelson e Morley riuscirono a compiere una serie di accuratissimi esperimenti mediante i quali fu assolutamente accertato che la velocità della luce rispetto alla terra era la stessa in tutte le direzioni.

Questo fatto suscitò grande sorpresa; si cominciò a dubitare della validità delle leggi della meccanica classica, specialmente quando cadde anche l'ultima possibile ipotesi: che l'etere potesse venir trascinato dalla terra nel suo moto; ciò infatti avrebbe comportato l'osservazione di tutta una serie di fenomeni collaterali che non furono mai osservati.

Le trasformazioni di Galileo e di Lorentz. Come è noto, per compiere una trasformazione di coordinate da un sistema ad un altro, occorre conoscere la velocità relativa dei due sistemi, se essi sono inerziali (o, se non lo sono, occorre applicare i metodi della cinematica dei moti relativi); in ogni caso, le trasformazioni di Galileo mostrano che un corpo non può avere la stessa velocità rispetto a due osservatori solidali con terne di riferimento inerziali e in moto relativo uniforme. La meccanica classica segue le trasformazioni di Galileo; se esse non sono più verificate, come nel

[1] Si richiedono una buona conoscenza della meccanica classica, ed una certa dimestichezza con il calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile reale.
[2] Il simbolo c, usato per indicare la velocità della luce, è l'iniziale della parola latina *celeritas* (velocità).

caso della luce, occorre cercarne altre che soddisfino le nuove esigenze (e che vedremo essere le trasformate di Lorentz) ma, ovviamente, la meccanica classica cessa (o riduce) la sua validità.

Albert Einstein, nel 1905, risolse l'enigma aperto dalla esperienza di Michelson e Morley postulando il suo principio di relatività, per il quale *tutte le leggi della natura debbono restare le stesse per tutti gli osservatori in moto traslazionale relativo uniforme tra di loro*. Einstein assunse anche *l'invarianza della velocità della luce rispetto a tutti gli osservatori inerziali*; ciò richiede che il principio di relatività sia applicabile alle leggi dell'elettromagnetismo.

Le trasformazioni di Galileo, che permettevano di passare dalle coordinate (x, y, z, t) di un sistema alle (x', y', z', t') di un altro sistema, con la condizione implicita $t = t'$, cessavano la loro validità.

Vediamo ora come è possibile ottenere nuove trasformazioni aderendo al postulato einsteiniano di invarianza della velocità della luce[3].

Supponiamo di avere due osservatori in moto rettilineo uniforme (con velocità v) tra di loro lungo l'asse XX' (vedi Fig. 1).

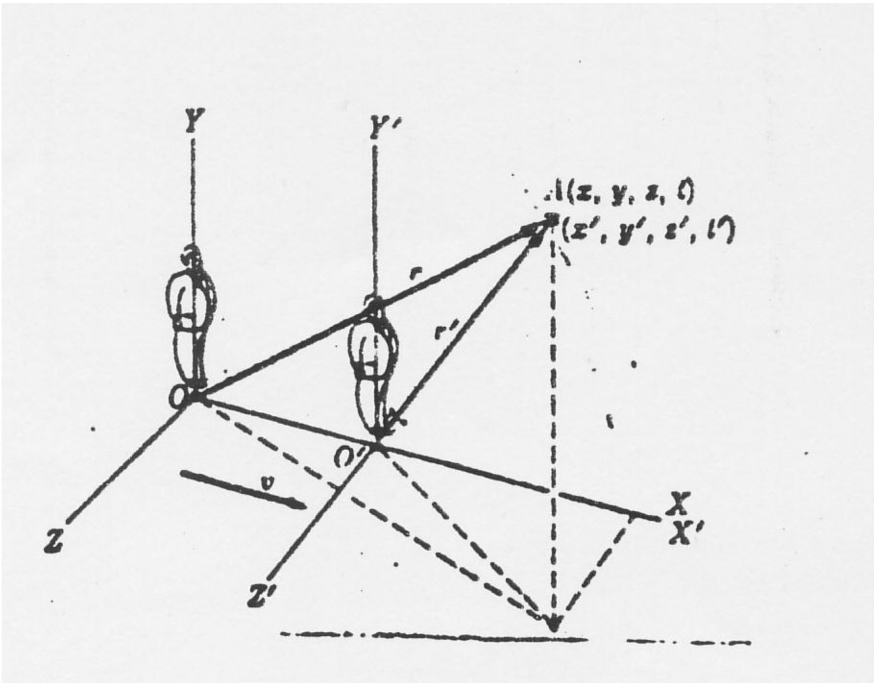

FIG. 1

Assumeremo che $t = t' = 0$ quando O e O' coincidono.

Supponiamo che per $t = t' = 0$ parta un raggio luminoso diretto verso il punto A. Quando il raggio giungerà in A, l'osservatore in moto sarà in una posizione diversa da O. L'osservatore fisso O potrà scrivere l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad , \tag{1}$$

mentre l'osservatore in moto, che vedrà raggiunto A dopo un tempo t', (c è la stessa per i due sistemi!) dovrà scrivere l'equazione:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad . \tag{2}$$

[3] Il postulato di invarianza della velocità della luce (nel vuoto) si riferisce, in realtà, all'invarianza della velocità di propagazione di qualunque radiazione elettromagnetica.

Dobbiamo ora trovare le trasformazioni che legano le due equazioni. La simmetria del problema ci dice che:

$$y'=y \;\; ; \;\; z'=z \;\; ;$$

inoltre, dovendo essere $x=vt$ per $x'=0$, e ogni ascissa x' necessariamente proporzionale alla rispettiva ascissa x diminuita della quantità vt, potremo scrivere $x'=k(x-vt)$; analogamente, il tempo t', che intuitivamente riconosciamo minore di t, sarà proporzionale al tempo t diminuito di una quantità dipendente linearmente dalla ascissa x: infatti, maggiore è la velocità v (e quindi il valore x nell'istante in cui il raggio luminoso raggiunge A) e minore, a parità di c, il tempo t' (misurato da O') necessario a raggiungere A. Potremo scrivere quindi $t'=a(t-bx)$; dove k, a, b, sono costanti la cui determinazione porta alle nuove trasformazioni. Naturalmente, per le trasformazioni di Galileo $k=a=1$, e $b=0$.

Sostituendo x' e t' nella (2) e ordinando secondo x^2, y^2, z^2, si ottiene una equazione che deve risultare identica alla (1); per questo occorre uguagliare i rispettivi coefficienti, e ciò conduce a tre equazioni nelle tre incognite k, a, b. Risolvendole , otteniamo:

$$k=a=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \;\; ; \;\; b=\frac{v}{c^2} \;\; .$$

Le nuove trasformazioni, che discendono dall'aver postulato la costanza della velocità della luce nei sistemi O ed O' sono quindi:

$$(3) \qquad \begin{cases} x'=k(x-vt)=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=a(t-bx)=\dfrac{t-\dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \;\; ;$$

Esse sono dette *trasformate di Lorentz* dal nome del fisico che le ottenne nel 1890 partendo da problemi di elettromagnetismo.

Notiamo che, a causa del grande valore di c rispetto ai valori di v normalmente riscontrabili sulla terra, i termini $\dfrac{v^2}{c^2}$ e $\dfrac{vx}{c^2}$ sono trascurabili, per cui praticamente $k\cong 1$, $b\cong 0$ e le trasformazioni di Lorentz coincidono con quelle di Galileo. Ciò però non avviene per corpi molto veloci (particelle subatomiche); inoltre non deve sfuggire la profonda differenza concettuale delle trasformazioni di Lorentz, che impongono la nuova nozione di *tempo proprio* per ciascun riferimento inerziale.

Trasformazione delle velocità e delle accelerazioni. Vediamo come si applicano le trasformazioni di Lorentz alle velocità e alle accelerazioni di un punto A nei sistemi di riferimento O ed O'.

La velocità di A nel sistema O ha per componenti:

(4) $$v_x = \frac{dx}{dt} \ , \ v_y = \frac{dy}{dt} \ , \ v_z = \frac{dz}{dt} \ .$$

Allo stesso modo, la velocità di A nel sistema O' ha componenti:

(5) $$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} \ , \ v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \ , \ v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} \ .$$

Differenziando le (3) e facendo uso delle (4) otteniamo:

(6) $$\begin{cases} dx' = \dfrac{dx - vdt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{v_x - v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \dfrac{dt - \dfrac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1-\dfrac{vv_x}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} dt \end{cases} .$$

Sostituendo nelle (5) i differenziali (6) otteniamo quindi:

(7) $$\begin{cases} v'_{x'} = \dfrac{v_x - v}{1-\dfrac{vv_x}{c^2}} \\ v'_{y'} = \dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vv_x}{c^2}} \\ v'_{z'} = \dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vv_x}{c^2}} \end{cases} .$$

Le (7) permettono di conoscere le velocità di un corpo che appaiono a due osservatori solidali con terne in moto tra loro traslazionale relativo uniforme lungo l'asse x. Se per semplicità consideriamo un corpo muoventesi anch'esso solo lungo l'asse x con velocità V rispetto alla terna fissa, le (7) divengono, essendo $v_x = V$, $v_y = v_z = 0$:

(8) $$v'_{x'} = V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}} \quad .$$

Verifichiamo se la (8) è compatibile con l'assunto einsteiniano che impone la medesima velocità della luce *c* per i due osservatori O ed O'. Un segnale luminoso propagantesi lungo l'asse *x* con velocità $V = c$ rispetto all'osservatore fisso *O* risulterà avere rispetto ad O' una velocità pari a:

(9) $$V' = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = c \quad ;$$

quindi anche l'osservatore O' misura una velocità pari a *c*.

La (8) può essere risolta rispetto a *V* ottenendo:

(10) $$V = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} \quad .$$

La (10) mostra che se V' e *v* sono minori di *c*, anche *V* è minore di *c*; se, come caso limite, avessimo $V' = v = c$, la (10) dà $V = c$.

Pertanto *c* è la massima velocità osservabile nell'universo; ciò risulta anche dalle (6) e (7) ove è presente un fattore sotto radice che deve restare positivo.

Proponiamoci di ricavare le accelerazioni. La componente lungo l'asse *x* della accelerazione rispetto ad O' risulta (ricordando la derivata di funzioni composte):

$$a'_{x'} = \frac{dv'_{x'}}{dt'} = \frac{dv'_{x'}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \quad .$$

Derivando la prima delle (7) otteniamo, utilizzando le (6):

$$a'_{x'} = a_x \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{vv_x}{c^2}\right)^3} \quad ;$$

e analogamente per le altre componenti.

Considerando un corpo in moto accelerato rispetto ad *O* con velocità iniziale inferiore a *v*, nel momento in cui esso raggiunge *v* e resta per un istante in quiete rispetto ad O' avremo $v_x = v$ e la equazione precedente dà:

$$a'_{x'} = \frac{a_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = k^3 a_x \; ; \text{ per le altre componenti si trova: } a'_{y'} = k^2 a_y \; ; \; a'_{z'} = k^2 a_z \quad .$$

L'ultimo gruppo di equazioni mostrano che l'accelerazione del corpo non è la stessa rispetto a due osservatori (O ed O') in moto relativo uniforme, a differenza delle trasformazioni di Galileo. Ciò è dovuto, evidentemente, al fatto che il postulato einsteiniano richiede l'invarianza della velocità della luce rispetto a tutti i riferimenti inerziali, cosa che impedisce l'invarianza della accelerazione.

Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz. Tra le più importanti conseguenze del postulato einsteiniano dobbiamo annoverare il fatto che se due osservatori in moto relativo uniforme misurano, ciascuno dal proprio sistema di riferimento, la lunghezza di un corpo o l'intervallo di tempo tra due eventi, perverranno a risultati differenti; ciò è dovuto al fattore $k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ presente nelle equazioni (3).

Analizziamo l'influenza sulle lunghezze. Si può definire *lunghezza* di un corpo la distanza che intercorre tra le sue estremità. Ora, se il corpo è in moto rispetto all'osservatore che deve misurare, è necessario che le posizioni delle estremità siano registrate simultaneamente.

Consideriamo un segmento a riposo rispetto all'osservatore O' di Fig. 1 e posto parallelamente all'asse $O'X'$. Indicando con a, b gli estremi del segmento, la sua lunghezza misurata da O' è $L' = x'_b - x'_a$; la simultaneità non è essenziale per O' perché il segmento è a riposo con esso, mentre invece è assolutamente indispensabile per O che vede il segmento in moto e che deve misurare le coordinate x_a ed x_b delle estremità allo stesso tempo t. O misurerà una lunghezza L pari a $x_b - x_a$. Applicando la prima delle (3) avremo per x'_a ed x'_b:

(11) $$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \qquad x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

Nelle (11) lo stesso tempo t in ambedue le espressioni indica la simultaneità. Ora, sottraendo membro a membro, otteniamo:

(12) $$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ovvero} \quad L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L' \ .$$

Ora, dato che il fattore sotto radice è minore dell'unità, la (12) mostra chiaramente che L è minore di L'; cioè, un osservatore O che vede un corpo in movimento misura una lunghezza minore che un osservatore O' rispetto al quale l'oggetto è a riposo: un corpo in moto appare più corto (attenzione, perché non si tratta di un effetto ottico, ma di un effetto relativistico!). Questo fatto va sotto il nome di *contrazione delle lunghezze*. Analizziamo ora cosa accade per gli intervalli di tempo.

Si può definire *intervallo di tempo* il tempo compreso tra due eventi, intendendo per *evento* un particolare ripetibile avvenimento che accade nello spazio in un dato punto e ad un dato tempo.

Consideriamo allora due eventi che accadono, nello stesso punto x', relativamente all'osservatore O', ai tempi t'_a e t'_b. L'intervallo di tempo intercorso tra i due eventi è $T' = t'_b - t'_a$. Ora, per un osservatore O rispetto al quale O' si muove con velocità v nella direzione degli X positivi, l'intervallo di tempo è $T = t_b - t_a$. Per trovare la relazione tra T e T' possiamo usare l'ultima delle (3) in cui avremo esplicitato il tempo t e avremo sostituito la x col valore analogamente esplicitato dalla prima delle (3). Otteniamo:

(13) $$t_a = \frac{t'_a + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \qquad t_b = \frac{t'_b + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

Abbiamo ricavato le (13), dette anche "Trasformate inverse di Lorentz", allo scopo di poter avere la stessa x' nelle due espressioni, cosicché possiamo scrivere, sottraendo membro a membro le (13):

(14) $$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{ovvero} \qquad T = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .$$

Ora, T' è l'intervallo di tempo misurato da O' (in quiete rispetto a x', punto ove avvengono i due eventi), mentre T è l'intervallo misurato da O rispetto al quale il punto x' è in moto quando avvengono i due eventi, e rispetto al quale quindi i due eventi avvengono anche in due differenti posizioni nello spazio; dato che il fattore sotto radice è minore di uno, T è maggiore di T'. Quindi gli avvenimenti temporali appaiono più lunghi ad un osservatore in movimento che ad un osservatore in quiete rispetto al luogo ove accadono: questo fatto va sotto il nome di *dilatazione dei tempi*.

Dinamica relativistica. Il principio di relatività einsteiniano applicato alla dinamica impone che *tutte le leggi della dinamica debbono essere le stesse per tutti gli osservatori inerziali in moto traslatorio relativo uniforme tra di loro*. In questi appunti verificheremo l'asserto per la definizione di forza e per il principio di conservazione dell'energia, analizzando le differenze con la meccanica classica, e le nuove implicazioni.

Ricordiamo che dalle trasformazioni di Galileo ottenevamo che, dati due osservatori in moto relativo uniforme (di velocità $\vec{v}$), se $\vec{V}$ e $\vec{V}'$ erano le velocità di un corpo relativamente ad O ed O' doveva valere $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$; dato che $\vec{v}$ è costante si ha che $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ e quindi $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt}$ ovvero $\vec{a} = \vec{a}'$, cioè i due osservatori misuravano la stessa accelerazione, ed essendo $\vec{F} = m\vec{a}$ ottenevamo $\vec{F} = \vec{F}'$; ciò conduceva ad affermare che ambedue gli osservatori inerziali misuravano la stessa forza agente sul corpo. Analogamente per la conservazione della quantità di moto: dette m_1 e m_2, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, $\vec{v'_1}$ e $\vec{v'_2}$ le masse e le velocità di due corpi in moto con velocità $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v'_1}$, $\vec{v'_2}$ rispetto ad O ed O' (tra loro in moto relativo di velocità $\vec{v}$) il principio di conservazione impone che:

$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = cost.$ ed essendo per l'osservatore O', $\vec{v'_1} = \vec{v_1} - \vec{v}$ e $\vec{v'_2} = \vec{v_2} - \vec{v}$, sostituendo si ha: $m_1(\vec{v'_1} + \vec{v}) + m_2(\vec{v'_2} + \vec{v}) = cost.$ ovvero $m_1\vec{v'_1} + m_2\vec{v'_2} = cost. - (m_1 + m_2)\vec{v} = cost.$ Cioè il principio vale anche per l'osservatore O' (e **solo** se $\vec{v}$ è costante).

Vediamo come si modificano questi concetti tenendo conto dell'assunto relativistico. La meccanica classica, nel definire la quantità di moto $\vec{Q} = m\vec{v}$, assume la massa come invariante (e indipendente dalla velocità rispetto al sistema di riferimento). Orbene, i risultati di un gran numero di esperienze fatte sulle particelle ad alta energia, sugli elettroni e protoni fortemente accelerati nei moderni acceleratori, sui raggi cosmici, ecc, dimostrano irrefutabilmente che ciò non è vero. La massa di una particella (e quindi di un corpo qualunque) rimane costante solo rispetto ad un riferimento in quiete con la particella medesima; rispetto ad ogni altro riferimento, la massa dipende dalla velocità che la particella ha rispetto ad esso. Si trova sperimentalmente che:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = km_0 \quad ;$$

ove k è lo stesso fattore delle equazioni (3) e m_0 è una costante, caratteristica di ciascuna particella, detta *massa a riposo*, ed è il valore di m quando $v=0$, cioè quando la particella è in quiete con l'osservatore.

Naturalmente, la variazione di massa con la velocità può divenire ragguardevole solo se la velocità è molto alta. Ad esempio, per $v=0{,}5c$ la massa aumenta solo di circa il 15%.

La quantità di moto di una particella diviene, pertanto, rispetto a un osservatore fisso:

$$\vec{Q} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = km_0\vec{v} \quad .$$

Come è possibile vedere, per v molto minore di c la quantità di moto relativistica coincide con quella classica. Analogamente, l'espressione della forza diviene:

(15)
$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad .$$

Esaminiamo ora come diviene la (15) nel moto rettilineo, circolare uniforme, generalmente curvilineo. Nel moto rettilineo non c'è variazione di direzione, per cui considerando solo la parte scalare:

(16)
$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{m_0\left(\frac{dv}{dt}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{dv}{dt} \quad .$$

Come si vede, nella (16) non vale la $F = ma$ classica.

Nel moto circolare uniforme c'è solo cambiamento di direzione, mentre la velocità rimane costante in modulo, per cui la (15) diviene:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \text{ed essendo } \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{v^2}{R} \text{ (ove } R \text{ è il raggio della circonferenza)}$$

la grandezza della forza normale (o centripeta) diviene:

$$F_n = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v^2}{R} = m \frac{v^2}{R} \quad . \tag{17}$$

Nel caso generale di moto curvilineo vario, essendo $\frac{dv}{dt} = a_T$ (accelerazione tangenziale) e $\frac{v^2}{R} = a_N$ (accelerazione normale) le componenti della forza lungo la tangente e la normale alla traiettoria si otterranno dalle (16) e (17):

$$F_T = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a_T = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot a_T = k^2 m a_T \quad ;$$

$$F_N = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot a_N = m a_N \quad .$$

Come si vede dalle equazioni precedenti e dalla Fig. 2, la forza non è parallela alla accelerazione alle alte velocità, a differenza di quanto accade nella meccanica classica.

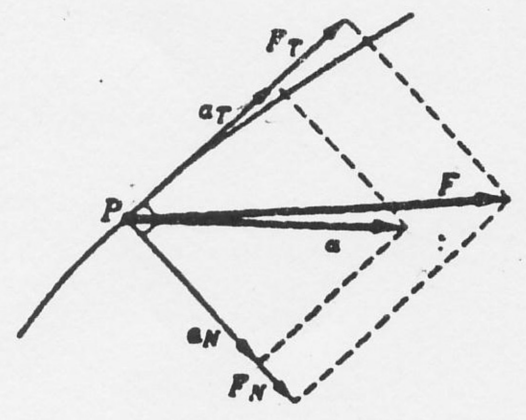

Fig. 2

Inoltre, la componente tangenziale è sempre maggiore della componente normale: ciò perché la forza normale cambia solo la direzione della velocità senza cambiare il suo modulo, e quindi anche senza influenzare la massa della particella, mentre la forza tangenziale non solo cambia il modulo della velocità, ma anche, di conseguenza, cambia, incrementandola, la massa della particella.

Vediamo ora come è possibile ricavare l'energia cinetica di una particella utilizzando le espressioni precedentemente ricavate.

Come è noto dalla meccanica classica il lavoro compiuto da una forza (tangenzialmente alla sua traiettoria) su un corpo si trasforma in energia cinetica (teorema delle forze vive), per cui potremo scrivere:

$$T = \int_0^v F_T ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv) ds = \int_0^v \frac{ds}{dt} d(mv) = \int_0^v v d(mv) \ .$$

Integrando per parti e usando la espressione della massa relativistica otteniamo:

$$T = \int_0^v v d(mv) = mv^2 - \int_0^v mv dv = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ .$$

Calcoliamo l'ultimo integrale, con la sostituzione di variabile: $\frac{v}{c} = t$; ($v = ct$; $dv = cdt$)

$$\int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{m_0 c^2 t dt}{\sqrt{1-t^2}} = m_0 c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = m_0 c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} - d(\sqrt{1-t^2}) = m_0 c^2 \left[-\sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{v}{c}} = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) \ .$$

Tornando all'espressione dell'energia cinetica:

$$T = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 .$$

Esaminando il risultato soprascritto, vediamo che si può esprimere anche come:

(18) $T = (m - m_0)c^2$ (usando la massa relativistica m) .

Ciò è di grande interesse: un guadagno in energia cinetica può essere espresso come *guadagno in massa* , dipendendo questa dalla velocità. Questa interpretazione può essere estesa per associare un cambiamento di massa Δm ad ogni variazione di energia ΔE di un sistema, cioè:

(19) $\Delta E = (\Delta m)c^2$ (la famosissima equazione di Einstein) .

Ad esempio, per la conservazione dell'energia in un sistema isolato dovrà essere $U_A + T_A = U_B + T_B = cost.$ ovvero $T_B - T_A = U_B - U_A$ da cui per la (18):

$$U_B - U_A = (m_B - m_A)c^2$$

che mostra chiaramente come ogni cambiamento di energia interna (potenziale) di un sistema, dovuta ad un suo riassestamento, può condurre praticamente ad un suo cambiamento di massa, come risultato di un cambiamento della sua energia cinetica interna. Naturalmente, perché il cambiamento di massa sia apprezzabile, il cambiamento di energia deve essere enorme (a causa del fattore c^2): per questo nelle reazioni chimiche è impossibile apprezzarlo, mentre si osserva chiaramente solo nelle reazioni (o interazioni) nucleari o nella fisica delle alte energie.

La (18) applicata ad una singola particella, si può scrivere: $mc^2 = T + m_0c^2$; la grandezza mc^2 viene normalmente chiamata *energia totale* della particella (ma non comprende la eventuale energia potenziale), mentre la grandezza m_0c^2 viene detta *energia a riposo* ed è l'energia estraibile dalla annichilazione della massa della particella: l'energia nucleare delle esplosioni atomiche o dei reattori nucleari è tratta di qui; ciò spiega l'enorme importanza delle teorie relativistiche per la civiltà odierna.

La Relatività generale (cenni). I concetti che sono stati esposti sin qui, come già accennato anche nella introduzione, fanno parte di quella teoria che Einstein chiamò *relatività ristretta*. In effetti, anche se sono stati introdotti elementi concettuali completamente nuovi, le relazioni trovate sono valide solo per i sistemi inerziali.

Per generalizzare la teoria ed estenderla anche ai sistemi in moto relativo accelerato, Einstein lavorò lungamente, utilizzando formalismi matematici molto complessi. Il risultato di questo lavoro è la teoria generale di relatività, che rappresenta uno dei massimi tentativi di sintesi di descrizione del mondo fisico mai compiuti da essere umano. Dal punto di vista pratico la relatività ristretta è sufficiente a coprire tutte le esigenze della tecnica derivanti dallo sfruttamento di fenomeni microscopici nel campo della elettronica e della fisica nucleare, ed ha il pregio di ridursi alla formulazione della meccanica classica a livello macroscopico, quando le velocità in gioco sono assai lontane da quella della luce. Ma dal punto di vista generale e filosofico non era sufficiente.

In questi appunti non tratteremo esaurientemente la relatività generale. Ci limiteremo ad accennare che essa viene oggi usata in tutti i problemi cosmologici e nell'astronomia, che fornisce spiegazioni interessanti di numerosi fenomeni che la meccanica classica non poteva spiegare; che, attraverso la definizione di un continuo tetradimensionale (spazio-temporale) in cui la presenza della materia introduce una modifica delle qualità geometriche, elimina la necessità di considerare separati i concetti di massa inerziale e di massa gravitazionale.

La relatività generale ha visto confermata la sua validità da numerose esperienze e osservazioni, quali quelle compiute sull'orbita del pianeta Mercurio, che presentava una inspiegabile precessione, nonché quelle sulla deviazione dei raggi luminosi in prossimità di enormi masse (osservabili durante gli eclissi di sole), o quelle sullo spostamento delle righe spettrali verso il rosso, che si nota per il sole o per le stelle. Tutte queste esperienze sono state previste e spiegate dalla relatività generale.

BIBLIOGRAFIA

L. LOVITCH, S. ROSATI, *Fisica Generale*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1996;
FACOLTÀ DI INGEGNERIA – PISA, *Appunti dalle lezioni al Corso di Fisica 1° (Elettrotecnici ed Elettronici)*, Centro 2P, Firenze, 1982.