

# UNA RICERCA-AZIONE ON LINE PER INTRODURRE I FRATTALI NELL'INSEGNAMENTO DI MATEMATICA

Adalberto Codetta Raiteri, OPPI, Milano, [adalberto@codetta.it](mailto:adalberto@codetta.it)

## 0-Riassunto

*The times they are changin'*. Non così l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Forse è una caratteristica della matematica. I numeri arabi hanno impiegato secoli per diffondersi in Europa. La lentezza dei cambiamenti nella matematica che insegniamo a scuola può oggi influenzare l'orientamento scientifico degli studenti? Quali sono i più efficaci metodi per sperimentare e divulgare l'insegnamento di nuovi contenuti matematici? Nella conferenza CIEAEM 55 tenutasi Plock (Polonia) nel 2003 è stato proposto di utilizzare i ben noti metodi di modellizzazione matematica dei problemi di realtà per studiare i frattali<sup>1</sup>. L'OPPI, Organizzazione Per la Preparazione Professionale degli insegnanti, ha cercato di sperimentare e divulgare questa proposta con metodi di ricerca-azione on line. La Ricerca Azione, iniziata nel mese di maggio 2004, è terminata nel giugno 2005: ha coinvolto 11 scuole tra primarie e secondarie. Si è svolta completamente a distanza senza incontri in presenza utilizzando una piattaforma e-learning. La documentazione integrale della ricerca, di cui si riferiscono gli aspetti essenziali è pubblicata on line in [http://www.maecla.it/ricerca\\_azione/index.htm](http://www.maecla.it/ricerca_azione/index.htm)

## 1-Frattali come e perché

Mandelbrot ha pubblicato "Les objets fractals"<sup>2</sup> nel 1975 e "Fractals, Graphics & Mathematics education"<sup>3</sup> nel 2002. Anche solo da questi due testi si evince come in questi anni la ricerca scientifica abbia profondamente modificato la visione del mondo, delle scienze, delle matematiche. Solo in parte ciò è avvenuto in quella insegnata nella scuola.

È davvero necessario far percorrere agli studenti ogni passo che l'umanità ha fatto per conquistare i concetti più recenti? La ricerca-azione di cui si riferisce ha assunto come ipotesi che non è sempre necessario. Ha verificato che è possibile far sì che gli insegnanti programmino percorsi praticabili per presentare aspetti di scienza corrente anche agli studenti più giovani. Questi percorsi suggeriscono che è possibile modificare la situazione attuale in cui la motivazione dei giovani verso gli studi scientifici sta declinando e con essa anche il peso della cultura scientifica nella formazione delle nuove generazioni.

La ricerca-azione ha lavorato per superare un'immagine della matematica legata al determinismo cercando di introdurre i concetti di complessità, di caos e di sistema. Ha utilizzato, nello studio di oggetti non propriamente reali come i frattali i metodi di modellizzazione matematica della realtà. Questi metodi, ampiamente diffusi in Italia da Emma Castelnuovo, possono essere sinteticamente rappresentati con una mappa

---

<sup>1</sup> A. Codetta Raiteri, "Fractals as didactic material", CIEAEM 55 Proceedings, in "Quaderni di ricerca didattica" of GRIM, n 14, <http://math.unipa.it/~grim/quaderno14.htm>

<sup>2</sup> B. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino, 1987. (*Les object fractales*)

<sup>3</sup> B. B. Mandelbrot, *Fractals, Graphics & Mathematical Education*, The Mathematical Association of America, 2002

costruita dagli insegnanti che hanno partecipato al corso di aggiornamento organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione a Città di Castello nel lontano 1978.

### MAPPA DI CITTA' DI CASTELLO



Questo schema mostra che la modellizzazione matematica è un processo molto complesso e impegnativo. E' comprensibile che gli insegnanti preferiscano concentrare i processi di insegnamento apprendimento alla conoscenza e comprensione dei modelli matematici. E' tuttavia plausibile l'ipotesi che questa focalizzazione possa essere una delle cause dei modesti risultati ottenuti dai nostri studenti nei test di comparazione internazionale: forse non prepariamo abbastanza gli studenti ad analizzare situazioni problematiche non ancora modellizzate.

Il nuovo contesto tecnologico fornisce nuove opportunità di elaborazione di modelli matematici anche a giovani dispongono di ancora modesti strumenti matematici. Ciò consente di utilizzare più ampiamente il metodo della modellizzazione di problemi reali a tutti i livelli scolari. I frattali, oggetti matematici molto frequenti in Internet, consentono un approccio interdisciplinare e si prestano ad essere studiati a differenti livelli scolari per la costruzione e l'approfondimento di numerosi concetti e strumenti matematici: geometria della natura, autosomiglianza, logaritmi, campo complesso, funzioni ricorsive.

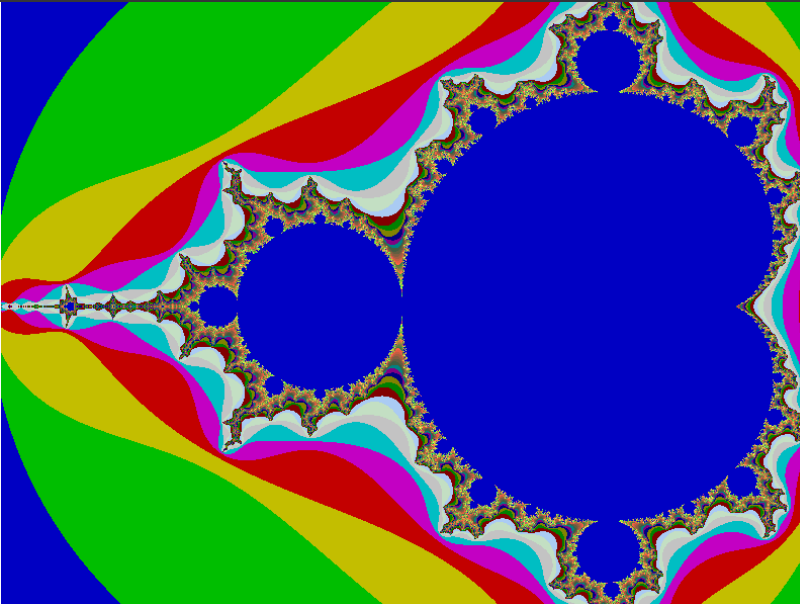
Per esempio, gli studenti possono scoprire l'idea di auto-similarità esplorando direttamente alcuni frattali pubblicati sul WEB, e, schematizzandoli, possono arrivare allo sviluppo di semplici modelli matematici di auto-similarità come la curva di Koch.

Vi sono molte ragioni per usare i frattali come stimolo di studio e nella scuola primaria e secondaria:

- I modelli frattali che sono usati per studiare molti problemi reali dalla medicina alla cinematografia
- I frattali presentano aspetti estetici che coinvolgono anche l'intelligenza emotiva degli studenti
- la vasta bibliografia pubblicata sul web, specialmente a fini didattici, consente ricerche condotte direttamente dagli studenti
- l'aiuto dei computer permette agli studenti di maneggiare curve e concetti una volta riservati a matematici esperti
- la natura dei frattali fa percepire che anche in matematica "si inventa" piuttosto che "scoprire".

## 2 Applicazione del modello ai frattali

Applichiamo ora il modello di matematizzazione dei problemi reali di Città di Castello allo studio dei frattali. Il laboratorio della scuola disporrà del software Fractint scaricabile gratuitamente dal Web. Gli studenti, preliminarmente avranno cercato sui giornali e riviste le fotografie di noti frattali.

<p><b>Problema di realtà</b></p>	<p>Il software Fractint scaricabile da internet</p> <p>(<a href="http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html">http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html</a>)</p> <p>genera oggetti frattali</p> <p>Studiamo i frattali di Mandelbrot</p>	
<p><b>semplificazione</b></p>	<p><i>Gli studenti utilizzando lo strumento "zoom" del programma Winfract esplorano più frattali e ne descrivono la caratteristica più evidente. Ci si aspetta che gli studenti la descrivano con frasi come "I frattali riproducono al loro interno la loro forma su scala sempre più piccola"</i></p> <p><i>L'insegnante propone all'attenzione dei ragazzi situazioni più semplificate.. Cinzia Lanus (<a href="http://math.rice.edu/~lanus/fractals/sierjava.html">http://math.rice.edu/~lanus/fractals/sierjava.html</a>) offre una simpatica applicazione Java che riproduce il triangolo di Sierpinski</i></p>	

<b>Situazione schematizzata</b>	IL software proposto da C. Lanius riproduce all'interno di un triangolo, ulteriori triangoli su scala sempre più piccola
---------------------------------	--

<b>analisi</b>		

<b>Testo del problema</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Nel primo passo quale frazione del triangolo non é colorata</li> <li>2. Nel secondo passo che frazione del triangolo non é colorata?</li> <li>3. Hai trovato una regola? Sei in grado di prevedere quale frazione del triangolo non sarà colorata nel Passo 4</li> <li>4. Cerca di scrivere la fomula che consente di calcolare la frazione del triangolo che non é colorata dopo <math>n</math> passi</li> <li>5. Confronta le prime tre figure. Cosa osservi?</li> <li>6. Descrivi una procedura per costruire le figure</li> </ol>
---------------------------	---

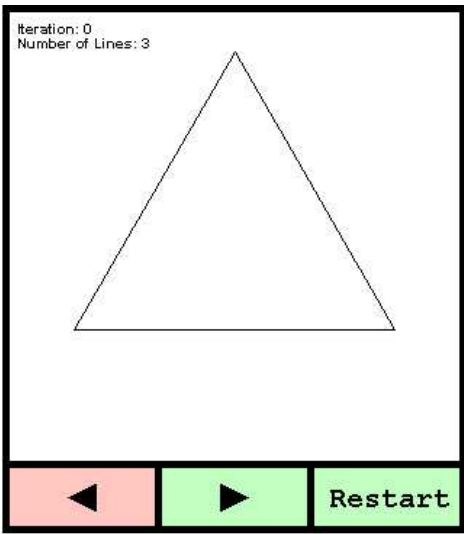
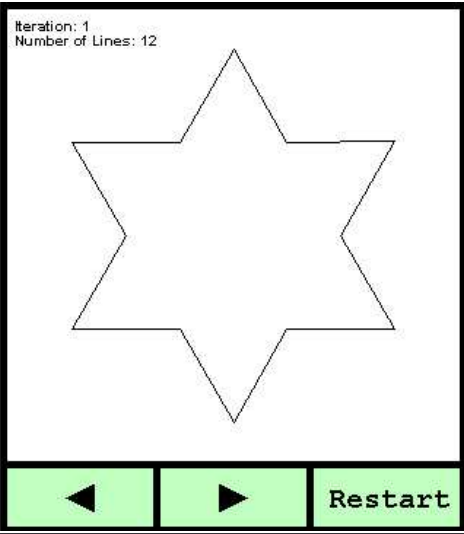
<b>Sintesi</b>	<i>Gli studenti secondo il differente livello scolare sviluppano esperienze nel passaggio dal linguaggio naturale alla scrittura simbolica, dal controllo semantico alla correttezza sintattica</i>		
----------------	---	--	--

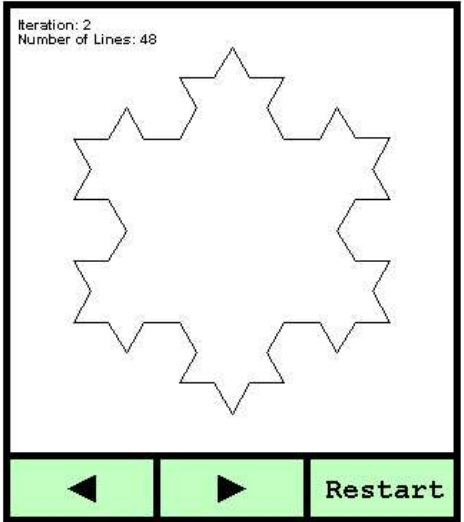
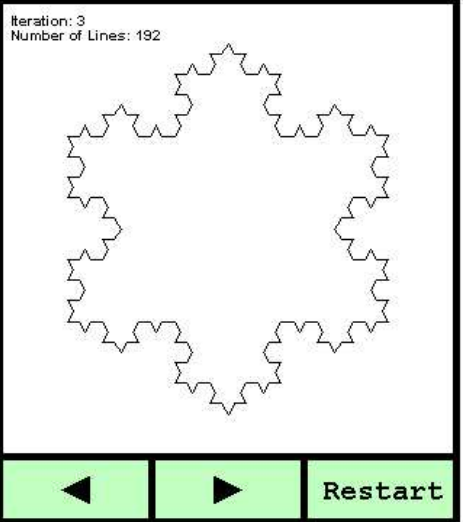
<b>Modelli matematici</b>	$S_n = (3/4)^n$	similitudine	algoritmo
	$a_0 = 1$	autosomiglianza	algoritmo iterativo
	$a_n = (3/4) a_{n-1}$	dimensione frattale	algoritmo ricorsivo

<b>Conoscenza e comprensione del modello matematico</b>	<i>Gli studenti studiano le successioni assegnate per ricorrenza collegandole ad algortimi ricorsivi. Utilizzando il linguaggio Logo (vi sono numerose versioni gratuite sul WEB) possono scrivere un programma ricorsivo che realizza il triangolo di Sierpinski e risolve il problema n.6</i>		
---	---	--	--

<b>Risultati Matematici</b>	<pre> to sierp :L   triangle :L   repeat 3[fd :L/2     lt 120     if :L&gt;10 [sierp :L/2]     rt 120     fd :L/2     rt 120] end </pre>	<pre> to triangle :L   fd :L   rt 120   fd :L   rt 120   fd :L   rt 120   riempi end </pre>	<pre> to riempi   pu   rt 30   fd 3   fill   bk 3   lt 30   pd end </pre>
<b>interpretazioni</b>	<p><i>Algoritmi ricorsivi codificati in Logo (senza preoccupazioni di approfondire la gestione delle variabili sullo stak di memoria) possono essere accessibili a studenti molto giovani e consentono di comprendere gli aspetti ricorsivi dell'autosomiglianza</i></p>		
<b>Possibili solutioni</b>	<p>Al termine di questa indagine gli studenti dispongono di una soluzione che consente di interpretare il frattale di Mandelbrot con due nuovi concetti: autosomiglianza e ricorsività</p>		
<b>valutazione</b>	<p><i>Può essere opportuno far osservare agli studenti anche dal solo punto di vista sintattico (senza entrare nel merito del calcolo dei numeri complessi) che l'algoritmo che genera il frattale di Mandelbrot ha caratteristiche analoghe a quelle studiate per descrivere il triangolo di Sierpinski</i></p>	<p><b><math>z(0) = c = \text{pixel};</math> <math>z(n+1) = z(n)^2 + c.</math></b></p>	
<b>problema di realtà</b>	<p>Gli studenti hanno acquisito stumenti semantici e sintattici utili per comprendere e interpretare il frattale di Mandelbrot generato dal software Fractint e modificare consapevolmente alcuni parametri (per esempio il numero massimo di iterazioni)</p>		

Un percorso del tutto analogo si può realizzare partendo dal quesito, ormai famoso, formulato da Mandelbrot per introdurre il concetto di dimensione frattale. Con un problema di questo tipo gli oggetti frattali vengono presentati non solo per gli aspetti estetici ma come veri e propri modelli per interpretare aspetti della natura,

<b>problema di realtà</b>	Quanto é lunga la costa d'Inghilterra?	
<b>semplificazione</b>	<i>Gli studenti hanno facilmente modo di accorgersi anche con lavori su carte geografiche (ma potrebbe essere utile un cercare di misurare un tratto costa marina o lacustre) che la lunghezza di una linea così irregolare dipende dal "passo" con cui la si misura. Anche questo concetto può essere approfondito con animazioni disponibili sul web</i>	
<b>situazione schematizzata</b>	Il fiocco di Kock nel sito di Cinthia Lanius ci presenta figure il cui perimetro, come quello delle coste d'Inghilterra, non é facilmente misurabile	
<b>analisi</b>	 <p>Iteration: 0 Number of Lines: 3</p>	 <p>Iteration: 1 Number of Lines: 12</p>

<b>analisi</b>	 <p>Iteration: 2 Number of Lines: 48</p>	 <p>Iteration: 3 Number of Lines: 192</p>
----------------	---	---

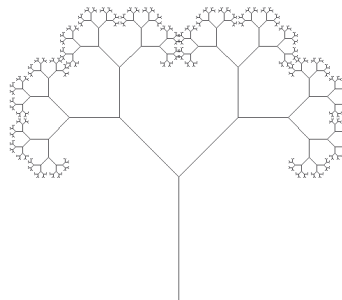
Il testo del problema potrà essere formulato, secondo i differenti livelli scolari, con gli stessi criteri con cui si sono impostati quelli relativi al triangolo di Sierpinski. Naturalmente l'attenzione in questo caso va posta sul fatto che ora il perimetro tende all'infinito mentre nel caso precedente la superficie del triangolo di Sierpinski tendeva a zero

La felce é altro frattale che può essere studiato come un problema di realtà



Sempre con lo stesso metodo di lavoro gli studenti potranno confrontare la felce reale con quella frattale, esplorare l'affascinante tema collega la ricorsività, la frattalità e le forme viventi. Potranno scrivere semplici programmi LOGO che emulano forme viventi.

```
to albero :L
fd :L
lt 45
if :L>3 [albero :L*3/5]
rt 90
if :L>3 [albero :L*3/5]
lt 45
bk :L
end
```



## 2-Definizione di ricerca-azione on line

Abbiamo lavorato facendo riferimento alla seguente definizione “ricerca-azione può essere descritta come una famiglia di metodologie di ricerca che perseguono il cambiamento e la comprensione allo stesso tempo. Nella maggioranza delle sue forme, fa ciò usando un processo ciclico o a spirale che oscilla tra azione e riflessione critica e negli ultimi cicli, rifinitura continua di metodi, dati e interpretazione alla luce della comprensione sviluppata nei cicli precedenti. È quindi un processo **emergente** che prende forma mentre la comprensione cresce, ed è un processo iterativo che converge verso una miglior comprensione di ciò che accade. Nella maggioranza delle sue forme, è anche partecipativo (tra le altre ragioni, un cambiamento è di solito più facile da comprendere



*quando coloro che sono affetti dal cambiamento sono coinvolti) e qualitativo*.<sup>4</sup> La ricerca-azione può avere una varietà di tipologie. Abbiamo cercato di organizzare una ricerca pilota: *“La ricerca pilota tende ad esplorare un ambito predefinito in funzione di uno status acquisito della ricerca, in un dominio in cui si cominciano ad intravedere dimensioni interessanti ma in cui non sono state ancora messe a punto strategie, guidelines ecc., o si avverte la necessità di mettere in evidenza dimensioni o ipotesi più specifiche. Esiste dunque un focus dell'indagine, un certo numero di vincoli (in funzione di tipologie già definite) ma rimangono anche spazi autonomi di esplorazione per gli attori. Da questa ricerca si tende soprattutto a ricavare tipologie o repertori operativi trasferibili ad altre situazioni”*<sup>5</sup>.

### **3-II clima della ricerca**

I partecipanti alla ricerca vivono in più regioni d'Italia. Non sono stati previsti incontri a faccia a faccia. Ciò significa che i partecipanti non hanno fatto uso della grande ricchezza di informazioni che deriva dal contesto, dalla gestualità, dal tono di voce, dalla mimica. Il contesto in cui ciascuno ha partecipato alla ricerca è stato costruito con una piattaforma e-learning.

Siamo sempre più oppressi da una vita frenetica. Il potenziale di accesso ad internet aumenta l'ansia di partecipazione, di presenza, di estensione della conoscenza. Gli insegnanti, non avendo una netta separazione tra il lavoro e le ore personali, sono particolarmente esposti alla pressione globale della rete, e al conflitto con la ...vita reale di figli, coniugi, amici.

Internet non fa imparare più in fretta. L'eccessivo carico di sorgenti d'informazione, di link, di gente coinvolta richiede che si abbia consapevolezza delle operazioni metacognitive necessarie per costruire apprendimenti personali stabili e ben organizzati. L'insegnamento-apprendimento a distanza, on line, richiede distacco, calma, serenità, riflessione. Ciò riguarda gli studenti, e gli adulti. Ciononostante, le piattaforme di e-learning presentano i vantaggi dell'insegnamento asincrono: non c'è la necessità di essere fisicamente presenti a incontri sacrificando impegni personali e professionali, e si può scegliere il momento migliore per dedicarsi alla ricerca-azione, al confronto con i colleghi, alla riflessione e allo studio col solo scopo di una crescita personale e professionale.

### **4-Cronaca della ricerca-azione**

La ricerca on line è iniziata il 21 maggio 2004 a seguito di brevi comunicazioni sul web in cui si invitava a prender parte ad una ricerca sui frattali; 74 insegnanti hanno mostrato interesse. Ognuno ha ricevuto un codice personale per accedere alla piattaforma on line. Su questa piattaforma gli insegnanti hanno trovato il documento base per la ricerca, un possibile modello di lavoro, numerosi links a siti dedicati all'insegnamento dei frattali, e l'opportunità di confrontarsi per mezzo di forum condividendo archivi di documenti.

Il documento base chiedeva ai partecipanti di presentare un progetto riferito su un modello condiviso, di sperimentarlo in classe e di presentare i risultati ottenuti. Il coordinatore della

---

<sup>4</sup> Bob Dick, <http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/whatisar.html>, web site at Southern Cross University, Australia

<sup>5</sup> A.Calvani, Ricerca azione on-line: Nuovi modelli per l'innovazione e sperimentazione educativa, [http://www.educational.rai.it/corsiformazione/autonomia/mappa/rtf/29\\_ris\\_02b.rtf](http://www.educational.rai.it/corsiformazione/autonomia/mappa/rtf/29_ris_02b.rtf)



ricerca si assumeva la responsabilità di certificare il lavoro fatto e di dare assistenza. Il tutto sempre attraverso lavoro a distanza. La proposta è stata accettata soltanto da un limitato numero di insegnanti che hanno presentato un progetto; 23 insegnanti sono stati iscritti alla ricerca dai loro Dirigenti Scolastici e hanno presentato 15 progetti (1 nella scuola primaria, 6 nella secondaria di primo grado, 3 nel biennio della secondaria di secondo grado, 5 nel triennio). In alcuni progetti hanno partecipato più insegnanti dello stesso consiglio d classe.

Dalla analisi dei progetti e delle relazioni finali di ciascuna sperimentazione emergono due tipi di prodotti:

- Prodotti realizzati dagli insegnanti per gli studenti
- Prodotti realizzati dagli studenti durante o alla fine dell'itinerario di studio dei frattali.

Per consentire una interpretazione condivisa, al termine dell'itinerario di studio sui frattali, gli insegnanti hanno avuto l'opportunità di somministrare ad ogni studente coinvolto un questionario messo a disposizione sulla piattaforma di lavoro. Il questionario era focalizzato su una domanda: "cosa è, per te, un frattale?"<sup>6</sup>

Per ogni progetto, gli insegnanti hanno prodotto una relazione conclusiva ed allegato ad essa i materiali realizzati da loro stessi, dagli studenti e alcuni questionari esemplificativi. Questi materiali compongono la documentazione con cui si è descritta e valutata la ricerca.

## 5-Uno strumento di analisi

Al fine di confrontare le strategie degli insegnanti, è stato chiesto loro di adottare lo stesso stile di documentazione. Siamo così in grado di trasferire molte frasi-chiave che descrivono ciascuna sperimentazione in una tabella di comparazione.

Questa tavola è organizzata per età al fine di favorire il riconoscimento delle tendenze comuni emergenti da ciascuna sperimentazione.

### 5.1 Sperimentazioni nella scuola primaria e secondaria di primo grado

Dalla tabella emerge una gran varietà di argomenti matematici connessi con i frattali. Gli insegnanti coi loro studenti hanno esplorato questa varietà di significati ed una accurata analisi mostra che nell'età 9-11 il focus è sulle trasformazioni geometriche, mentre dai 12-14 esso si sposta sui processi iterativi.

Scopi dell'insegnante	Obiettivi per gli studenti	Contenuti e percorsi
<b>Studenti 9-10 anni-quarta elementare</b>		
Contribuire alla formazione di una mentalità scientifica che sia flessibile e aperta. Far comprendere agli alunni che molti modelli e molta "matematica" è formulata allo scopo di rappresentare il mondo reale	Capire le proprietà dei triangoli nella geometria euclidea. Capire i concetti di traslazione, rotazione, simmetria assiale e centrale, omotetia, similitudine. Costruire frattali: fiocco di neve di Koch, triangolo di Sierpinsky. Capire il significato di auto-similarità	Esempi animati per la costruzione di frattali, spiegati e commentati con l'uso di filastrocche. Studio dei triangoli nella geometria euclidea. Osservazione del triangolo di Sierpinsky e di curve famose come la cardioide, la curva di Peano, di Koch. Costruzione di oggetti frattali. Comprensione del concetto di auto-similarità. Materiali: filastrocche che descrivono il processo di costruzione di un frattale, animazioni elettroniche, mappe cognitive che rappresentano il processo di apprendimento dello studente, software Logo e Fractint

<sup>6</sup> A. Codetta, G. Cappucci, G. Cazzaniga, "Lo zero e il senso comune. Indagine sulla provvisorietà di un insegnamento disciplinare". Armando Editore, Roma, 2001, pagg. 34-42

<b>Studenti 11-12 ; primo grado scuola secondaria; primo anno</b>		
Iniziare il processo di matematizzazione di oggetti reali. Formulare di domande. Ricercare risposte. Stimolare l'abilità degli studenti di scomporre un problema in sotto-domande e di organizzare osservazioni in sequenza logica per affrontare problemi complessi.	Capire il concetto di forma. Ricerca delle regolarità. Riconoscere le figure geometriche dalle proprietà che le caratterizzano. Riconoscere le proprietà invarianti all'interno di una trasformazione. Acquisire un linguaggio corretto al fine di riferire le esperienze condotte.	Visualizzazione di oggetti tridimensionali da rappresentazioni bidimensionali: sezione piana. Introduzione alla topologia, linea aperta, linea chiusa, linee connesse. Striscia di Moebius, curva di Peano. Trasformazioni geometriche: simmetria assiale e rotazione. Concetti di forma e di auto-similarità. Processo iterativo: manipolazioni usando carta, uso di software. Esperienze di geometria nell'osservazione della natura: disposizione delle foglie, rappresentazione di una foglia considerando le sue proprietà invarianti. Modello di una foglia: la felce. Attività di osservazione e manipolazione; navigazione sul web. Software: Cabri
<b>Studenti 12-13, primo grado scuola secondaria; secondo anno</b>		
Stimolare interesse e motivazioni negli studenti al fine di accrescere e sviluppare abilità intuitive e creative. Suscitare abilità di osservazione riguardo fatti e fenomeni della realtà.	Captare analogie e differenze, sia varianti che invarianti. Affrontare problemi complessi scomponendoli in sottoproblemi. Usare il concetto di misura all'interno di differenti contesti. Usare linguaggio e tecnologie informatici. Usare mappe concettuali. Vedere il lato artistico ed estetico di una figura geometrica.	Fare modelli matematici: osservazione di figure regolari della realtà (foglia di felce). Fare modelli all'interno della geometria euclidea. Nascita della geometria frattale come modello per osservare e rappresentare la realtà. Ricerca di figure frattali: presentazione con uso di software. Riassunto del metodo SEW-COM per ricerca sul web. Ricerca su internet di siti sui frattali. Concetti di dimensioni, perimetro, area: perimetro di alcune figure piane, perimetro di una costa marina. Costruzione, con l'uso di CABRI, di un albero e di un fiocco di neve. Analisi di figure frattali fatte da artisti. Uso di software FRACTIN, IFS, FRACTAL, EXPLORER.
<b>Studenti 13-14; primo grado scuola secondaria; terzo anno</b>		
Stimolare l'abilità degli studenti ad affrontare problemi più complessi componendoli in sottoproblemi. Indurre gli studenti a capire e usare linguaggi specifici nei campi scientifico, tecnico e multimediale. Guidare gli studenti nella selezione di dati e informazioni a seconda dell'obiettivo dato.	Comprendere la caratteristica di ogni frattale: la auto-similarità. Descrivere la struttura modulare di un frattale. Connettere sequenze ricorsive ad algoritmi ricorsivi. Realizzare la struttura di base di un frattale usando il software CABRI. Disegnare semplici frattali con algoritmi ricorsivi usando macro di CABRI. Capire i frattali come modello interpretativo della realtà. Analizzare perimetro e area di alcune figure frattali. Capire e calcolare dimensioni di una curva frattale.	Studio storico: il problema delle forme "irregolari" nella realtà che non possono essere descritte con la geometria classica e la ricerca di nuove teorie. Scoperta delle principali caratteristiche di queste forme irregolari: sono composte di strutture ripetitive che possono essere viste, descritte e riprodotte. Ricerca guidata dei frattali sul web. Presentazione di frattali come modello interpretativo della natura che spiega la realtà attraverso un algoritmo. Osservazione e realizzazione, con CABRI, di curve frattali. Introduzione circa il concetto di dimensione frattale come numero razionale, confronto con le figure classiche come numeri interi. Ricerca, con EXCEL, della dimensione frattale di curve realizzate. Ricerca di figure frattali nell'arte moderna e contemporanea, in collaborazione con l'insegnante di arte

## 5.2 Sperimentazione nella scuola secondaria di secondo grado

I docenti hanno adattato gli argomenti connessi con i frattali agli scopi delle istituzioni scolastiche di appartenenza. I frattali possono essere adattati con facilità a coprire una gran varietà di competenze, come si vede confrontando le esperienze in scuole tecniche, scientifiche, artistiche, professionali. Gli insegnanti, lavorando con gli studenti dai 14 ai 19 anni, hanno gradualmente spostato il centro di attenzione dalle trasformazioni geometriche e dai processi iterativi, alla loro implementazioni in linguaggi di programmazione. Inoltre sono stati presi in considerazione gli aspetti culturali e scientifici dei frattali. L'altissimo

numero di siti WEB che propongono approcci differenti e creativi allo studio dei frattali, ha suggerito ai docenti di unire lo studio dei frattali con riflessioni sui metodi di ricerca sul WEB.

Scopi dell'insegnante	Obiettivi per gli studenti	Contenuti e percorsi
<b>Studenti 14-15 anni- istituto professionale, primo anno</b>		
<p>Uso di ICT per sperimentare percorsi didattici personalizzati Stimolare l'uso di software in geometria collegandolo alle capacità di descrivere, riflettere esperienze. Sviluppare stili di insegnamento cooperativi attraverso il metodo problem-solving.</p>	<p>Sviluppare l'intuizione spaziale. Approfondire la conoscenza di base geometrica</p>	<p>Rivedere, con CABRI, i concetti di triangolo, poligono, perimetro, area,... Usare e comprendere, le macro in CABRI Capire il concetto di trasformazione geometrica Studiare e descrivere le caratteristiche del fiocco di neve e del triangolo di Sierpinsky. Creare alcune forme frattali.</p>
<b>Studenti 14-15; liceo artistico, primo anno</b>		
<p>Presentare un'idea viva della matematica. Usare le risorse CT (Information Communication Technology) per rendere gli studenti protagonisti del loro apprendimento di geometria Promuovere un approccio interdisciplinare connettendo matematica e arte. Promuovere la comprensione e la comparazione di linguaggi usati in differenti campi della conoscenza</p>	<p>Usare le risorse ICT per studiare, generare, visualizzare oggetti frattali. Selezionare informazioni sul WEB col metodo SEWCOM. Connettere differenti informazioni attraverso appropriati modelli di interpretazione. Organizzare e rappresentare le conoscenze acquisite con mappe concettuali e reti di mappe.</p>	<p>Caratteristiche degli oggetti frattali e argomenti matematici correlati: auto-similarità, trasformazioni geometriche, algoritmi, funzioni iterative, attrattori frattali. Campi di conoscenza che usano frattali. Alcuni famosi oggetti frattali: set di Mandelbrot, rete di Sierpinsky. Storia dei frattali e autori. Frattali e arte, natura e tecnologia.</p>
<b>Studenti 16-17 anni; liceo scientifico, terzo anno</b>		
<p>Promuovere l'abilità di trovare informazioni nel contesto ICT. Far capire agli studenti i differenti strumenti e metodi per cercare informazioni..</p>	<p>Conoscere e usare il metodo SEWCOM per selezionare informazioni Comprendere l'importanza dei frattali come modello di fenomeno scientifico. Inserire la teoria di frattali nello sviluppo attuale della ricerca matematica.</p>	<p>Storia dei frattali Applicazioni pratiche dei frattali. Studio di oggetti frattali famosi Costruzione con CABRI del triangolo di Sierpinsky e del fiocco di neve. Realizzazione di programmi Pascal per il calcolo dell'area dei triangoli di Sierpinsky e del perimetro del fiocco di neve.</p>
<b>Studenti 17-18 anni; liceo scientifico, quarto anno</b>		
<p>Applicare il programma di matematica usuale in un nuovo campo suscettibile di affascinare gli studenti Promuovere l'abilità di selezionare e trovare informazioni sul WEB Sviluppare uno stile autonomo di lavoro.</p>	<p>Usare mappe concettuali e reti di mappe per descrivere e riorganizzare la conoscenza acquisita nella ricerca scolastica Usare le risorse ICT per trovare e comunicare informazione. Conoscere e usare modelli matematici in vari contesti.</p>	<p>Scoperta della auto-similarità attraverso l'analisi di frattali con Tierazon. Misura della lunghezza di una costa, dimensione frattale. Trasformazioni geometriche: studio di Sierpinsky, Kock e altri frattali IFS. Funzioni ricorsive: disegno di una figura frattale scrivendo un programma Pascal Logaritmo: dimensione di oggetto frattale Numeri complessi: studio del set di Mandelbrot e dei frattali Julia Probabilità: frattali non deterministici Applicazioni di geometria frattale.</p>

<b>Studenti 17-18 anni; istituto tecnico, quarto</b>		
Potenziare l'attitudine a fare un'analisi critica sulle conoscenze acquisite Sviluppare abilità pratiche di fare modelli matematici	Comprendere la caratteristica della geometria frattale, le differenze e le invarianze rispetto alla geometria euclidea Scomporre un problema in sotto-problemi	Progettare frattali con procedure ricorsive, distinguendo frattali IFS e LS Creare frattali con differenti linguaggi di programmazione
<b>Studenti 18-19 anni; istituto tecnico, quinto anno</b>		
Presentare un'idea di matematica che superi vecchi problemi usando problemi nuovi e reali. Sviluppare abilità a valutare differenti linguaggi di programmazione in ordine alla soluzione di diversi problemi.	Comprendere le caratteristiche della geometria frattale, differenze e invarianze con la geometria euclidea Analizzare applicazioni utili e inutili dei frattali Conoscere e usare il metodo SECOM per trovare e selezionare informazioni	Triangolo di Sierpinsky, teoria dei frattali IFS, frattali LS, dimensione frattale. Creare frattali con Pascal, C++, Java, Cabri, Excel, distinguendo quelli IFS e quelli LS. Progettazione di un sito WEB sui frattali

## 6 Conclusioni

Gli insegnanti hanno prodotto una grande varietà di materiali didattici sui frattali: lezioni, guide, problemi, mappe concettuali, questionari, software didattici, test,...perfino poesie! Anche gli studenti hanno contribuito a questa abbondanza: disegni a mano libera, al computer, costruzioni geometriche, articoli, ipertesti, programmi per computer, siti web, sitografie,... Questi materiali, a causa della loro ricchezza e complessità, non sono stati ancora completamente esaminati e classificati. Una analisi più approfondita potrebbe dare molte indicazioni per l'introduzione dei frattali ad ogni livello di scuola e per la progettazione di corsi di formazione per docenti. Al livello attuale, questa ricerca on-line può formulare le seguenti indicazioni:

- I frattali possono essere studiati ad ogni livello scolastico
- I frattali offrono molte opportunità di fare "buona matematica"
- I modelli matematici dei frattali piacciono agli studenti e spingono alcuni di loro ad approfondire argomenti matematici
- I frattali possono essere studiati con approcci euristici a partire da problemi reali
- I frattali danno agli insegnanti di matematica un ruolo importante nelle attività interdisciplinari che sono sempre più richieste dal sistema scolastico
- Lo studio dei frattali necessita di interazione WEB e di lavoro di gruppo. In questo modo lo studio dei frattali stimola comportamenti che aiutano la ricerca attiva sia nei docenti che negli studenti
- I frattali possono essere studiati all'interno degli ordinari programmi di matematica: trasformazioni geometriche, sequenze infinite, serie infinite, funzioni ricorsive, logaritmi, numeri complessi, probabilità...

Questa ricerca si è svolta completamente on line. Gli insegnanti elencati nel paragrafo seguente hanno lavorato insieme per oltre un anno senza incontrarsi. È stato un ambiente di lavoro nuovo per una gran parte dei docenti coinvolti. Le difficoltà di questo inedito contesto sono state superate in modo soddisfacente: la quasi totalità dei docenti che ha aderito alla proposta ha progettato e posto in atto una sperimentazione personale ma coerente con gli indirizzi generali. Dalle tabelle descrittive delle sperimentazioni emergono infatti significative continuità tematiche maturate spontaneamente nell'interazione del

lavoro distanza. Va tuttavia riconosciuto che il livello di partecipazione, di interazione, di scambio dei materiali è stato disomogeneo. Ciò da un lato costituisce un limite “fisiologico” che si manifesta anche nei gruppi di lavoro in presenza, dall’altro un punto d’attenzione per le responsabilità del coordinatore al quale compete una specifica responsabilità tutoriale: lo scambio di esperienze professionali, a distanza, in forma scritta, è molto più impegnativa che in presenza e in forma orale. La presentazione di ipotesi, proposte, materiali è una operazione che attiva nei partecipanti comprensibili preoccupazioni su come esse verranno accolte, discusse, interpretate da persone che non si conoscono. La presenza di funzioni tutoriali in questo tipo di attività va pertanto adeguatamente definita e rinforzata.

I risultati di questa ricerca mostrano che un lavoro cooperativo supportato da piattaforme e-learning apre interessanti opportunità per sviluppare i ruoli professionali dei docenti. Primo Brandi e Anna Salvatori, “Progetto Innovamatica” Università di Perugia, Dipartimento Matematica e Informatica, hanno supportato la ricerca dando assistenza e consigli, essi hanno inoltre partecipato al comitato scientifico con Stefania Marangoni, Renza Cambini e Laura Lotti. Il coordinatore li ringrazia, e ringrazia tutti gli insegnanti e i dirigenti delle scuole partecipanti. Ringrazia in particolare Dorianò Azzera, manager della piattaforma Claroline, che ha ospitato la ricerca nell’open campus dell’IPSIA “Castigliano” di Asti e il dirigente Ugo Rapetti.

## 5 Insegnanti e classi partecipanti

Nome insegnanti	Materia	Classe	Età	Istituto
Ivana Niccolai	Matematica. Scienze	Classe 4	8-10	Scuola Primaria “G. Garibaldi”, GE
Letizia Corniani	Scienze mat, fis, chim, nat	Classe 1	11-12	Istituto Comprensivo I Suzzara, MN
Ernestina Prada Gianfranco Damiano Chiara Maggioni	Scienze mat, fis, chim, nat Lettere Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo Barlassina, MI
Susanna Abbati Rosella Grezzi	Scienze mat, fis, chim, nat Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo “Rodari”, Baranzate, MI
Gianpaolo Maran Vincenzo Trabona	Scienze mat, fis, chim, nat Educazione Artistica	Classe 2	12-13	Istituto Comprensivo 7 Vicenza
Mariarosa Sanfelici	Scienze mat, fis, chim, nat	Classe 2 Classe 3	12-13 13-14	Scuola Media “B. Croce” Gonzaga, MN
Marzia Galafassi Carla Tabai	Matematica e TIC Matematica e TIC	Classe I Classe I	14-15 14-15	Istituto d’istruzione Superiore “S. G. Bosco” Viadana, MN
Luca Vampa Renata Casagrande Giovanna da Col	Matematica e informatica Discipline pittoriche Discipline geometriche	Classe I	14-15	Istituto Statale d’Arte “Bruno Munari”, Vittorio Veneto, TV
Adriana Minocci	Matematica	Classe III	16-17	Liceo Scientifico “G. Spezia”, Domodossola (VB)
Anna Venditelli Gianluca Tiengo	Matematica Laboratorio Matematica	Classe IV	17-18	Istituto Tecnico Industriale “E. Majorana” Cassino, FR
Marina Celora Antonella Montrezza Carmen Giovanelli Vitaliano Caimi	Matematica e Fisica Matematica e Fisica Scienze Filosofia	Classe IV Classe IV	17-18 17-18	Liceo Scientifico “A. Tosi” Busto Arsizio, VA
Antonella Trevisol	Matematica	Classe V	18-19	Istituto Tecnico Industriale “Cartesio” Cinisello Balsamo (MI)

## 6 Sitografia

A.Codetta, Documentazione della ricerca, [http://www.maecla.it/ricerca\\_azione/index.htm](http://www.maecla.it/ricerca_azione/index.htm)

Nicolai, Fractint tutorial,  
[http://www.maecla.it/bibliotecaMatematica/pz\\_file/PEITGEN\\_fractint/fractint.htm](http://www.maecla.it/bibliotecaMatematica/pz_file/PEITGEN_fractint/fractint.htm)

Laura Lotti; <http://www.frattali.it/>

Michael Frame, Benoit Mandelbrot, and Nial Neger, Yale University, Fractal Geometry;  
<http://classes.yale.edu/Fractals/>

Pattern Exploration: Integrating Math and Science for the Middle School;  
[http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher\\_homepage.htm](http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher_homepage.htm)

Cynthia Lanius, A Fractals Unit for Elementary and Middle School Students, Rice University;  
<http://math.rice.edu/~lanius/frac/index.html>

Patterns in nature; Centre in polymer studies; <http://polymer.bu.edu/ogaf/index.html>

Giorgio Pietrocola: <http://www.maecla.it/tartapelago.htm>

## 7 Software

Fractint; <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>,

Tierazon; <http://home.houston.rr.com/fergusonsc/Tierazon-v29/>

Flarium 24; <http://ktaza.com/fractal/>

Fractal Explorer; <http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/>