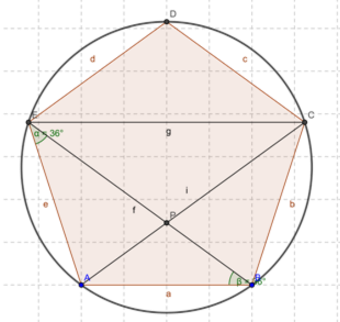
Percorsi didattici Multidisciplinari I

Sezione Aurea, Poligoni regolari

Francesca Ferrari



Indice

Introduzione

Lo scopo del presente elaborato è quello di riassumere alcuni percorsi didattici concernenti la sezione aurea e la costruzione di poligoni regolari. Diverse discipline vengono coinvolte in ciascun percorso: matematica, informatica, storia e storia dell'arte.
Descrivendo questi laboratori l'intendimento non è assolutamente quello di dettare un modello rigido di percorso, ma quello di portare un esempio di come congiungere discipline diverse al fine di svolgere un' analisi personalizzata con i propri studenti, analisi in cui i ragazzi possano sentirsi coinvolti non solo nella ricerca ma anche nella elaborazione delle informazioni reperite.

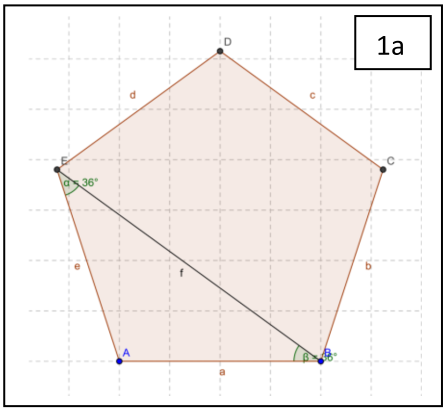
La sezione Aurea

Introduzione al concetto di Rapporto aureo - La sezione aurea con Geogebra

Proviamo a costruire un pentagono regolare. Gli studenti si accorgono subito che non è una impresa facile da realizzarsi a mano. Un programma di grafica come Geogebra può risolvere i problemi tecnici grazie ad una funzione che traccia un poligono con angoli interni pari a:

$$\vartheta = \frac{2*5-4}{5}\frac{\pi}{2} = \frac{6}{5}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{5} = 108°$$

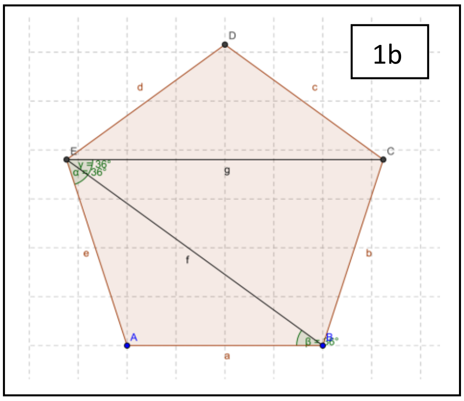
Per semplicità consideriamo i lati di lunghezza unitaria.



Il triangolo EAB è isoscele avendo come lati AB ed EA, cioè due lati del pentagono, pertanto gli angoli $A\hat{E}B$ ed $E\hat{B}A$ devono essere uguali perché angoli alla base di un triangolo isoscele e devono valere 36° perché la somma degli angoli interni del triangolo è 180°.

Si può adesso dimostrare che $B\hat{E}C = A\hat{E}B$. Disegniamo a tal fine la circonferenza circoscritta al pentagono e notiamo che i due angoli insistono su archi di eguale lunghezza. Dunque EB e DC sono paralleli tra loro.

Si tracci l'altra diagonale e indichiamo con P il punto d'intersezione con la prima. Alla seconda diagonale è possibile applicare gli stessi ragionamenti.



Il quadrilatero $PEDC$ ha lati opposti paralleli ed angoli opposti congruenti, è dunque un rombo e quindi EP = ED = PC = DE.

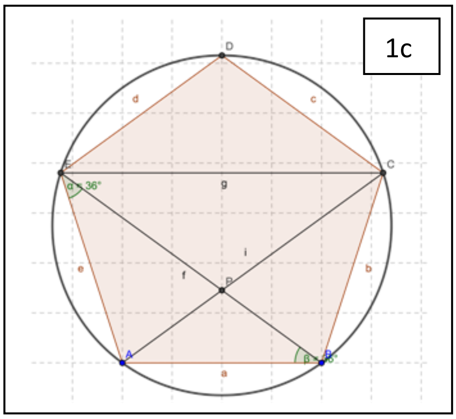
Abbiamo così dimostrato che intersecandosi le diagonali individuano due segmenti di lunghezza uguale a quella dei lati.

Inoltre, i due triangoli EPC ed APB sono simili. I lati corrispondenti sono quindi in proporzione e chiamando d la lunghezza delle diagonali del pentagono possiamo scrivere:

$$EP : PB = EC : AB = d : 1 = EB : DC = EB : EP.$$

Anche EP, grazie alla nostra scelta di considerare i lati di lunghezza unitaria, è uguale ad 1, così come DC. Dunque si riscrive:

$$1 : PB = EC : AB = d : 1 = EB : 1 .$$



da cui si estrapola $1 : PB = d \Rightarrow PB = \frac{1}{d}$.

Notando che $EB = EP + PB = 1 + PB = d$, si ottiene:

$$d = 1 + \frac{1}{d} \Longrightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

Da cui ricaviamo come unica soluzione accettabile:

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

Valore che appunto è denominato rapporto aureo o sezione aurea e nei testi è in generale indicato con Φ.

Ora che gli studenti hanno compreso di cosa si tratta con il termine sezione aurea possiamo presentare un excursus storico.

Origini storiche - I Pitagorici ed il rapporto aureo

I primi a riscontrare il rapporto aureo tra due segmenti furono i pitagorici. Ciò accadde in modi che possono interessare gli studenti in quanto la narrazione storica si mescola alla leggenda in un intreccio misterioso. Il racconto di Giamblico[1] *De vita Pythagorica* narra di come Ippaso da Metaponto, un pitagorico, sia morto in mare, colpevole di avere rivelato agli uomini il segreto della costruzione della sfera di dodici pentagoni e per aver divulgato la dottrina degli irrazionali e degli incommensurabili. La sfera di dodici pentagoni è il dodecaedro, cioè uno dei cinque poliedri regolari, ed era già noto ai pitagorici.

Alla faccia pentagonale del dodecaedro era associato il pentagramma stellato [figura 2], cioè la stella a cinque punte creata dalle diagonali del pentagono e ricorrente come elemento decorativo nell'arte babilonese ed anche simbolo magico legato alla loro cosmologia.

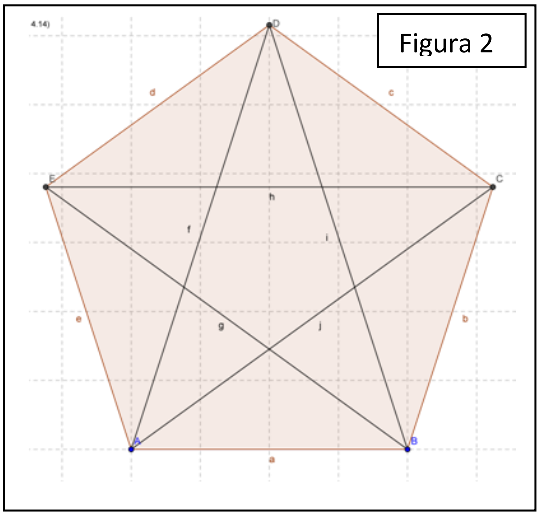


Figura 2

I pitagorici fecero loro questo simbolo ereditandone anche il significato cosmologico ad esso attribuito[2].

La scuola pitagorica deve in effetti molto al pensiero magico del vicino oriente in termini di concezioni cosmologiche, e fiorisce proprio nel periodo in cui questa cultura comincia a confrontarsi con la nascente cultura ellenica.

I Pitagorici non mirarono mai a dissolvere la trama simbolica degli originali rituali esoterici, ma diedero impulso ad una analisi rigorosa del mondo e delle sue geometrie. La sapienza sacra si accostò così alle aspirazioni di una scienza laica.

È importante presentare questi aspetti agli studenti, per il valore storico che queste concezioni hanno avuto quale origine della nostra cultura, ma anche per l'estrema attualità che il tema di conciliare le diverse visioni del mondo ha assunto in questa epoca.

Proprio in linea con questo rigore scientifico il pentagramma stellato venne esaminato geometricamente dai Pitagorici oltre che accolto quale simbolo magico.

I Pitagorici studiarono quale fosse il rapporto tra il lato della stella ed il lato del pentagono.

Una loro convinzione era che ci fosse sempre un sottomultiplo comune di due segmenti comunque scelti, un segmento cioè che potesse essere utilizzato come 'regolo' per misurare i due segmenti scelti[3].

Il rapporto tra le misure dei due segmenti essendo un rapporto tra numeri interi era sicuramente un razionale.

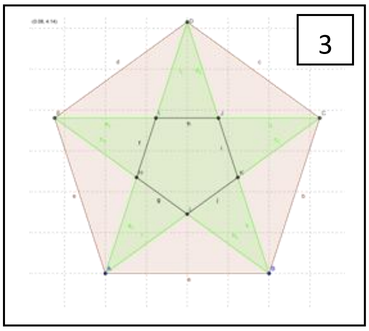
Il pensiero dei Pitagorici, però, era molto più profondo ed è bene spiegarlo agli studenti. Secondo la scuola pitagorica un ordine cosmico regolava l'Universo che si esplicitava mediante una successione di analogie strutturali organizzate su rapporti numerici.

Altri laboratori di matematica

Seguendo sempre un filo conduttore storico si possono affrontare altre dimostrazioni geometriche ricorrendo sempre all'utilizzo di Geogebra. In questo modo si possono fare comprendere ai ragazzi metodi diversi per ricavare il rapporto aureo.

Per mantenere il filo conduttore del discorso possiamo cominciare con il laboratorio inerente alla stella Pitagorica.

Triangoli isosceli aurei

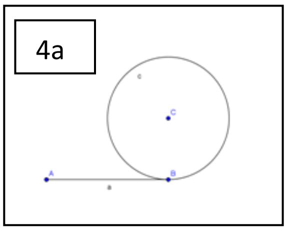


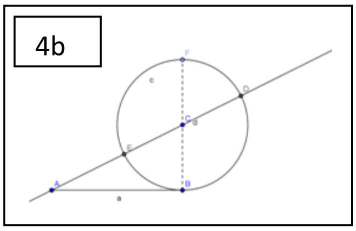
Euclide negli Elementi [IV.11] suggerisce lo spunto che può essere utilizzato per il laboratorio. Un triangolo isoscele aureo ha il lato obliquo e la base che rappresentano un rapporto aureo. Sottraendo a questo un triangolo aureo se ne ottiene un altro anche esso aureo.

Cinque triangoli aurei creano un pentagono ed una stella pitagorica. È semplice giocare con gli studenti facendo notare che sottraendo al pentagono grande la stella si ottengono cinque gnomoni aurei.

Il gioco può continuare all'infinito perche continuando a tracciare con Geogebra le diagonali del pentagono interno si ottengono sempre stelle che differiscono dal pentagono per cinque gnomoni aurei[4].

Ricavare la sezione aurea di un segmento





Seguiamo le indicazioni che Euclide fornisce nel libro II degli *Elementi*. Si disegni il segmento AB e la circonferenza di raggio AB tangente in B al segmento stesso.

Si tracci, quindi, la secante passante per A e per il centro C.

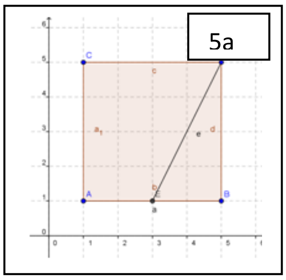
Per un teorema che è bene ripassare con gli studenti il segmento ED=AB, cioè la parte esterna della secante, è media proporzionale tra l'intera secante AD e la parte esterna AE.

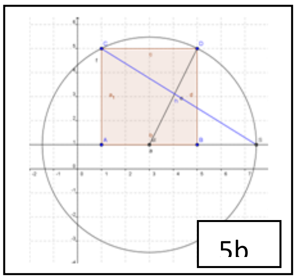
Si ha cioè:

$$AD: AB = AB: AE$$

Per cui in modo analogo al precedente laboratorio, mostriamo che AE è sezione aurea del segmento AB.

Trovare il segmento data la sezione aurea





Dato il segmento AB, il quale sia la sezione aurea di un segmento, è interessante ricercare con gli studenti il segmento stesso. Si tracci dunque AB e si trovi il punto medio. Si costruisca il quadrato ABCD di cui AB sia la base.

Si disegni ora la circonferenza di centro M e di raggio MD.

È facile verificare con Geogebra, la proporzionalità:

$$AS: AB = AB: BS$$

Irrazionalità della sezione aurea e sue approssimazioni

Si presenta adesso un laboratorio didattico volto a fare comprendere come il rapporto aureo sia un numero irrazionale e ad approfondire quale sia la differenza tra numeri razionali ed irrazionali. Se la sezione aurea fosse un numero razionale, esisterebbe una unità di misura intera per L e D. l e d sarebbero interi e si genererebbe così due impossibili successioni infinite decrescenti di interi[5]. Dunque è chiaro che la sezione aurea non è rappresentabile solo con numeri interi e con le quattro operazioni su di essi.

Prendendo spunto dalla spiegazione di Odifreddi [3] si può fare intuire agli studenti il fatto che la irrazionalità di un numero si può in un certo senso misurare con il numero di approssimazioni che ne possono essere fornite in campo razionale.

Con gli studenti delle classi quarte del Liceo Classico-Scientifico Statale Ariosto-Spallanzani di Reggio Emilia sono stati scritti in linguaggio Pascal alcuni algoritmi che permettono di calcolare il valore della sezione aurea e che sono presentati nei seguenti paragrafi.

La successione di Fibonacci

Volendo mantenere l'approccio storico di questo percorso didattico è stato preso in considerazione innanzi tutto l'algoritmo ispirato alla successione di Fibonacci.

Leonardo Pisano, figlio di Bonaccio, nel 1201 propose la successione di numeri riportata in Tabella. La successione di Fibonacci si ottiene a partire da due valori iniziali $a_1=0$, $a_2=1$, il terzo termine è dato dalla somma di a_1 ed a_2. I termini seguenti sono dati sempre dalla somma dei due termini precedenti.

Tabella 1

Iterazione	F
1	0
2	1
3	1
4	2
5	3
6	5
7	8
8	13
9	21
10	34

Tavola 1

```
Program Fibonacci;
var n, i: integer;
   a1, a2 , f: integer;
begin
 writeln('Calcolo dei termini della serie di Fibonacci');
 repeat
  writeln('Digita il termine della serie che vuoi calcolare (>3)');
  readln(n);
 until (n>3);
 a1:=0;
 a2:=1;
 for i:=1 to n do
   begin
    f:= a1+a2;
    a1:=a2;
    a2:=f;
    writeln('Il', i, '° termine della serie è', f);
   end;
 readln;
end.
```

Fibonacci propose questa successione in merito alla filiazione di una coppia di conigli. La medesima successione era però già stata proposta in india per rappresentare una particolare metrica poetica[6].

Tavola 2

```
Program Aurea_Fibonacci;
var n, i: integer;
   a1, a2 , f: integer;
   fi: real;
begin
 writeln('Calcolo dei termini della serie di Fibonacci');
 repeat
  writeln('Digita il termine della serie che vuoi calcolare (>3)');
  readln(n);
 until (n>3);
 a1:=0;
 a2:=1;
 for i:=1 to n do
   begin
     f:= a1+a2;
     a1:=a2;
     a2:=f;
     fi:=a2/a1;
     writeln('Il', i, '° termine della serie è', f);
     writeln('Alla', i, '° iterazione fi vale', fi);
   end;
 readln;
end.
```

La tavola 1 mostra il codice Pascal scritto dagli studenti per stampare a schermo i primi **n** termini della successione di Fibonacci, ove n è un numero dato in input dall'utente.

Una struttura iterativa ripete la somma dei termini a1 ed a2 ed assegna questo valore ad F che rappresenta il termine corrente della successione.

Ad ogni iterazione i valori di a_1 ed a_2 vengono riassegnati in modo che la somma possa evolvere e fornire il risultato successivo.

Successione di Fibonacci e sezione aurea

La connessione tra la successione di Fibonacci e la sezione aurea fu notata per la prima volta da Kepler nel 1611. Calcolando il rapporto tra un termine della successione ed il precedente si ottengono valori che sempre meglio approssimano il valore di Φ.

L'aggiunta di una riga di codice consente appunto di eseguire questo calcolo. Nella figura è presentato lo spezzone di programma modificato, nel quale viene stampata a schermo la successione dei numeri ottenuti.

Per comprendere quantitativamente quante iterazioni occorrono per approssimare la sezione aurea è stato modificato il codice in modo da

Tavola 3

```
Program Aurea_Fibonacci;
var n, i: integer;
   a1, a2 , f: longint;
   fi_ir, fi, r: real;
begin
 writeln('Calcolo dei termini della serie di Fibonacci');
 repeat
  writeln('Digita il termine della serie che vuoi calcolare (>3)');
  readln(n);
 until (n>3);
 fi_ir:=(1+sqrt(5))/2;
 a1:=0;
 a2:=1;
 for i:=1 to n do
   begin
     f:= a1+a2;
     a1:=a2;
     a2:=f;
     fi:=a2/a1;
     writeln('Alla', i, '° iterazione fi vale', fi);
     r:=abs(fi-fi_ir);
     writeln('e lo scostamento vale: ', r:0:5);
   end;
 readln;
end.
```

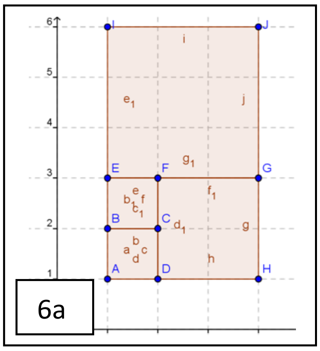
confrontare ad ogni iterazione la sezione aurea calcolata con la formula ed il rapporto tra i termini di Fibonacci. Il codice stampo la differenza Φ-r.

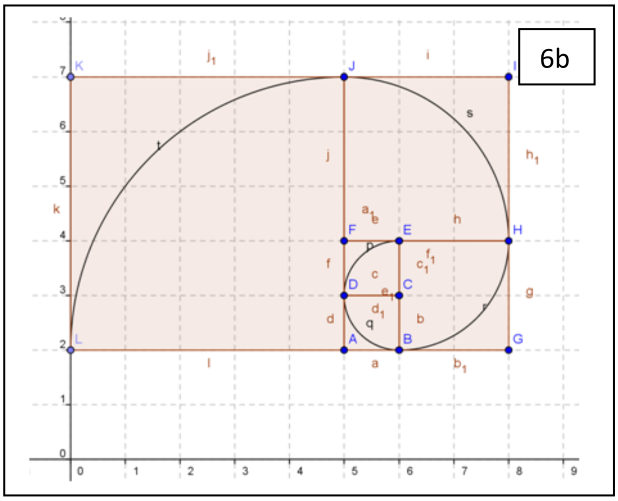
Altri algoritmi per il calcolo della sezione aurea.

Volendo approfondire ulteriormente si può richiedere ai ragazzi di ricercare altri metodi per calcolare il valore della sezione aurea. In appendice A sono presentati altri algoritmi implementati con gli studenti del Liceo "Ariosto-Spallanzani" al fine di calcolare Φ^7.

Rappresentazione grafica della successione di Fibonacci e della sezione aurea

Rappresentare graficamente la sezione aurea è molto semplice. Si disegni con Geogebra una successione di quadrati come quella in figura 6a. Si comincia cioè disegnando un quadrato di lato 1, poi adiacente un altro quadrato come il primo. Sul lato di misura 2 si disegna un altro quadrato di lato 2. Si ottiene così una successione di rettangoli sempre più prossimi a quello aureo.


6a


6b

La Spirale aurea

Inserendo ora nei rettangoli archi di circonferenza come in figura si ottiene una spirale chiamata aurea. Le spirali così ottenute sono denominate anche logaritmiche. È facile con Geogebra fare comprendere agli studenti che quando si sommano gli angoli le corde si moltiplicano. L'equazione della spirale è dunque esponenziale e la base è Φ. Tale equazione ha applicazioni in campo biologico: in molti tipi di arbusto le foglie crescono seguendo la spirale aurea in modo che la loro disposizione le esponga alla luce del sole. Le scaglie dell'ananas si sistemano su torciglioni che ne contengono in numeri di Fibonacci. Fare notare questi particolari agli studenti li convince del fatto che la matematica non sia una disciplina fredda e lontana dalla vita quotidiana.

La sezione aurea in architettura

La civiltà greca tentò di unificare tutte le arti e le scienze. Gli stessi rapporti armonici tra le proporzioni degli edifici, in particolare quelli sacri, erano applicati alle composizioni musicali. L'intento era quello di ricreare nelle opere artistiche l'armonia dell'Universo. Lo studio di Pitagora si era originato proprio dalla ricerca di leggi numeriche che regolano l'armonia musicale ed aprì così la via per la formulazione di parametri morfologici che divennero principi compositivi per opere scultoree, architettoniche ed artistiche fino ai giorni nostri.

Si comprende come soprattutto nella costruzione di edifici ed opere sacre sia di fondamentale importanza realizzare una corrispondenza tra l'armonia della struttura e l'armonia del cosmo.

Le chiese paleocristiane mostrano spesso nelle loro planimetrie l'attenzione a questi parametri geometrici da parte degli architetti.

Inoltre i principi su cui si basa l'architettura rinascimentale sono orientati all'utilizzo di piccoli numeri interi con i quali organizzare la distribuzione e la disposizione spaziale delle varie parti di un edificio.
L'architetto non è libero di applicare all'edificio uno schema casuale di rapporti, le proporzioni devono conciliarsi con un sistema di ordine superiore, esprimendo l'armonia cosmica. L'utilizzo della geometria per esprimere armonia e legami con il trascendente è dunque una presenza costante in diverse epoche storiche.

Ricerca di esempi di proporzioni auree nell'arte

Vari ed illustri esempi di applicazione di questi principi geometrici all'architettura ed all'arte possono essere forniti agli studenti.
In un percorso didattico di questo genere, però, è forse consigliabile proporre agli studenti di cercare con l'ausilio dell'insegnante alcune opere nella propria città invece che sui manuali di storia dell'arte.
Ricercare tra gli edifici sacri facilita il reperimento di rapporti aurei tra le proporzioni, appunto per la rilevante valenza simbolica che questa geometria ha assunto nella storia.
Nel nostro caso la città di Reggio Emilia offre vari esempi molto interessanti: uno di essi è la Cattedrale dedicata a Santa Maria Assunta [figura 7].

La Cattedrale di Reggio Emilia


7

Anche ad una prima occhiata inesperta la facciata della Cattedrale di Reggio Emilia appare come il risultato di una sovrapposizione di stili diversi. I restauri ed i rifacimenti nei secoli non hanno coinvolto soltanto la facciata, ma anche la struttura e gli interni.
Per gli studenti può essere molto stimolante addentrarsi in una ricerca storica che li porti a ricostruire gli eventi che hanno coinvolto il duomo ed a cercare non solo il rapporto aureo tra le proporzioni della sua struttura ma anche le evoluzioni storiche della sua geometria. Nel seguito si riporta una traccia fruibile per una ricerca operativa ed uno svolgimento personalizzato del percorso.

Ricerche storiche da condurre con gli studenti

La ricerca storica può prendere spunto dai documenti di deputazione di storia patria che presentano i principali eventi che portarono la cattedrale ad essere quella che possiamo oggi ammirare.
Le fonti certificano l'esistenza della basilica paleocristiana già nel V secolo [5]. Detta basilica sarebbe sorta sulle vestigia di una antica domus romana, come testimoniano reperti dei più recenti restauri e, forse, già all'epoca dell'edificazione sarebbe stata dedicata a Santa Maria Assunta.
I documenti [5] ci forniscono alcune misure attendibili delle dimensioni dell'aula, che sono di seguito presentate in tabella 2.

Dando questi dati in input al programma di tavola 3 e facendo il confronto con i valori che il codice in tavola 2 ha prodotto vediamo che i rapporti tra le proporzioni non sono casuali.
Il rapporto tra gli assi della pianta si avvicina ad essere quello aureo. In generale i rapporti tra le dimensioni sono compatibili con i rapporti tra i numeri di Fibonacci calcolati con il codice Pascal.
Come spiega il documento [5] questa particolare geometria era in linea con le scelte architettoniche applicate ad altre basiliche paleocristiane come ad esempio il Duomo di Modena.
I documenti [5] trattano anche delle evoluzioni della facciata. È stato possibile realizzare la prima immagine grazie a rilevamenti archeologici condotti nel 1890, rilevamenti dai quali è apparso chiaro che l'angolo al vertice del pentagono irregolare doveva essere di 120°. La scelta non doveva esser casuale ma mirata a rendere l'angolo al vertice prossimo a quello di un esagono regolare [vedere sezione 2].
Durante il X secolo la basilica fu probabilmente ricostruita, per motivazioni non certe. Probabilmente lo scopo fu un adeguamento architettonico prima ancora che liturgico. Di questo periodo sono pervenute le notizie più confuse. Ciò che sembra certo è che la geometria dell'aula non sia variata considerevolmente come si nota osservando la sinossi delle planimetrie [figura 8a]. Ciò che invece ha mutato il suo aspetto e la sua geometria fu la facciata [figura 8b] che guadagnò in altezza fino a che il rapporto tra gli assi passò da 3:4 a 4:4 e quello tra fianco ed acroterio passò da2:3 a 3:4. L'angolo al vertice, però, rimase prossimo a 120°. La geometria poligonale regolare dunque fu conservata e con essa, si pensa, il suo significato di armonia ed ordine [sezione 2].

	Nomenclatura	**Misure in piedi**	**Misure in metri**
Larghezza da fiancata a fiancata	Lf	72	22,18
Lunghezza dalla mezzeria del primo pilastro alla mezzeria del pilastro dell'arcone trionfale	Lp	108	33,26
Lunghezza navata maggiore compreso golfo dell'abside	Ln	120	37

Tabella 2: misure pianta della basilica paleocristiana

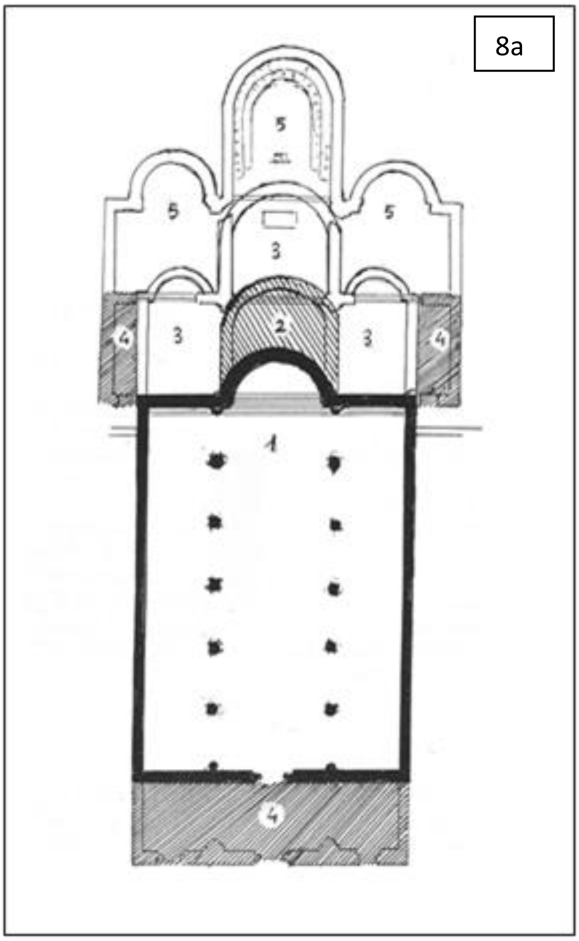
	Valori dei rapporti tra le dimensioni	
Larghezza da fiancata a fiancata	Lp/Lf	1,499098
Lunghezza dalla mezzeria del primo pilastro alla mezzeria del pilastro dell'arcone trionfale	Ln/Lf	1,66817

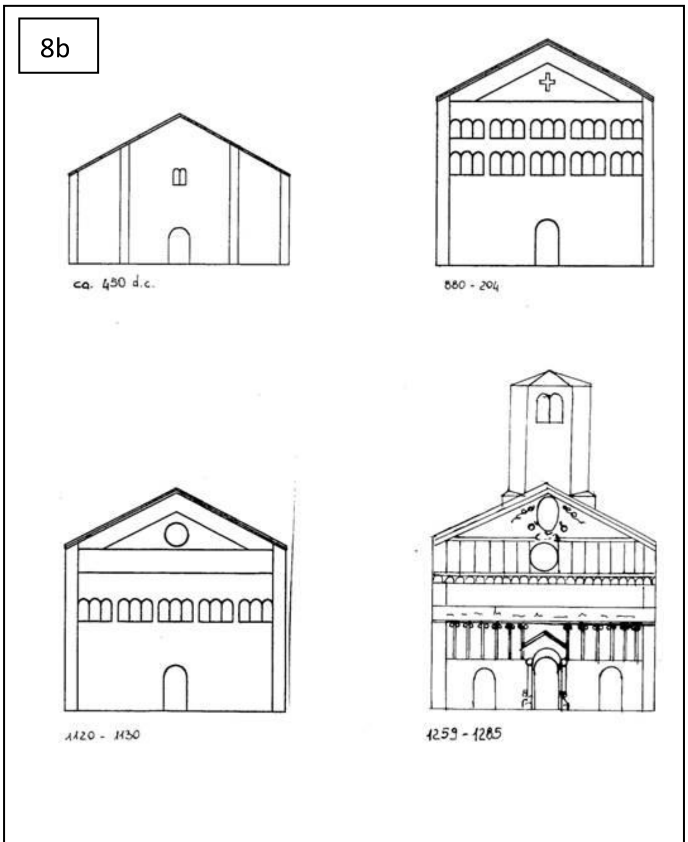
Tabella 3: rapporti tra le proporzioni della basilica paleocristiana

	Nomenclatura	**Misure in piedi/deg**	**Misure in metri/deg**
Larghezza da fiancata a fiancata	Lf	72	22,18
Larghezza mascheramento marmoreo	Lm	90	27,62
Altezza navata minore	Hn	31	9,54
Angolo al vertice	α		123°

Tabella 4: misure della facciata

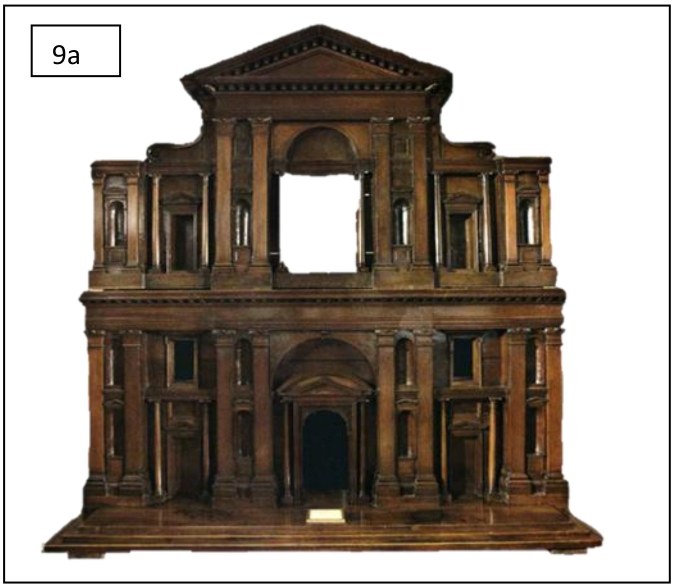
Tra il 1120 ed 1130 la Cattedrale andò incontro ad una fase metamorfica finalizzata all'adeguamento liturgico dettato dalla riforma gregoriana.
La profondità della zona absidale aumenta divenendo tripartita, senza ancora una volta modificare la geometria dell'aula.
Fu nel XIII secolo che una intensa serie di lavori, resasi necessaria per rimediare ai crolli ed ai cedimenti strutturali che interessavano la Cattedrale, modificò le geometrie, pure senza stravolgerle.
In questa fase, che prende il nome di restauro Malaguzzi[8] dal nome del donatore che fornì i finanziamenti per i lavori, fu ricostruita la facciata della Cattedrale, come si vede dalla sinossi, antistante la precedente.
Attorno al 1269 fu costruito il tiburio sulla nuova facciata. Appare chiaro che questa fase di lavori doveva rispondere ad esigenze di consolidamento architettonico, più che di adeguamento delle geometrie al canone gotico imperante in quel particolare periodo. La stessa costruzione del tiburio è di dubbie motivazioni.



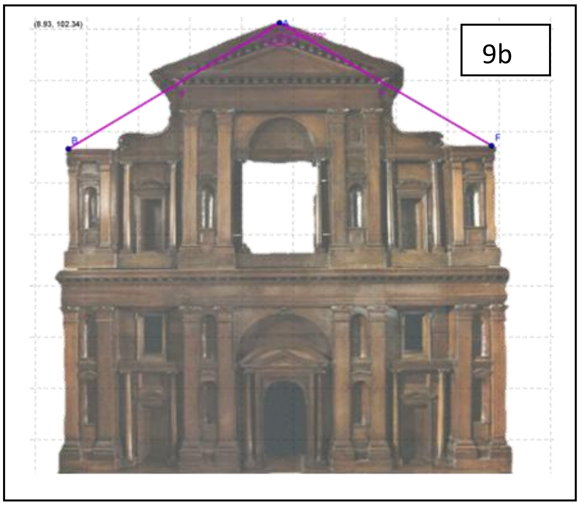


Facciata della basilica nelle prime fasi della metamorfosi: paleocristiana, berengariana, romanica, malaguzziana.

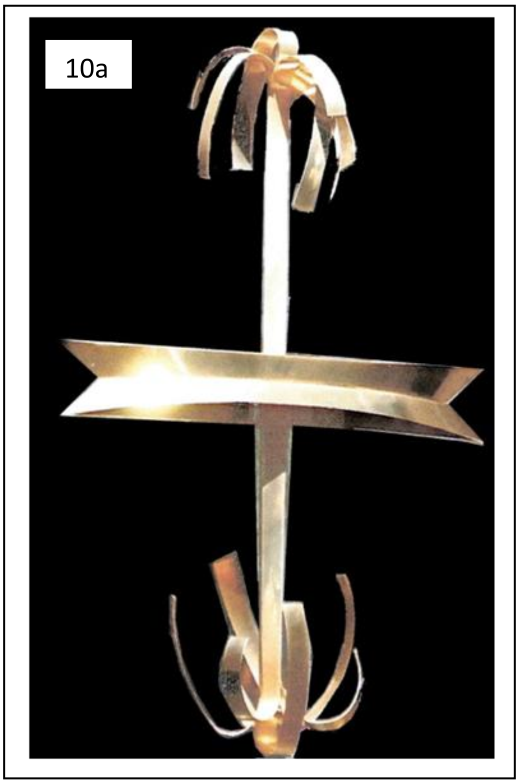
La chiesa, come possiamo oggi ammirarla, raggiunse la sua configurazione planimetrica definitiva solo in epoca rinascimentale quando, per andare incontro alle nuove tendenze stilistiche ed alla rinnovata sensibilità nei confronti dello stile classico, fu portata avanti un'opera di profondo rinnovamento. Dalla costruzione delle volte nel '400 all'adeguamento degli interni i lavori erano concepiti per adeguare la Cattedrale alle nuove concezioni.


9a

L'abside fu nuovamente allungato e si progettò di rinnovare gli interni ed in particolare la facciata, per la quale furono considerati varii progetti.
Il registro inferiore di marmi bianchi, che possiamo oggi vedere incompiuto e che copre la più antica facciata, si deve al progetto di Prospero Sogari[9] [figura 10a].
Un modello in legno di pero selvatico, realizzato su commissione dello stesso Sogari e conservato al Museo Diocesano di Reggio Emilia e Guastalla [7], ci rende edotti di un interessante particolare: l' angolo al vertice continua ad essere prossimo a 120°. Utilizzando Geogebra è possibile importare l'immagine del modello nella vista grafica e misurarne l'angolo alla sommità con la funzione apposita.


9b

La Cattedrale oggi

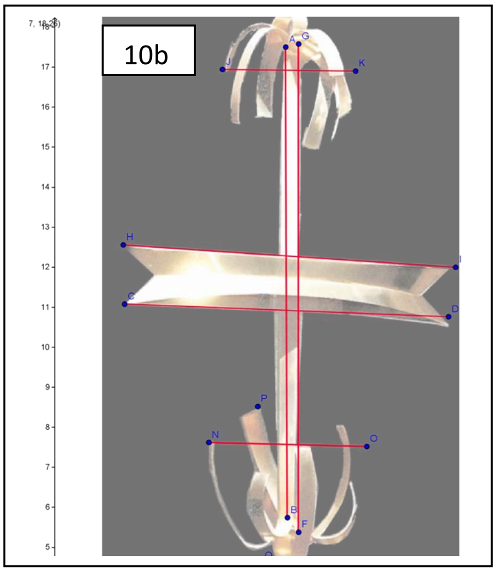

10a

La sezione aurea nella planimetria è ancora rintracciabile osservando la disposizione delle colonne, ma non solo. In occasione dell'ultimo adeguamento liturgico, volto a rendere la Chiesa conforme alle linee del Concilio Vaticano II [8], nuove opere sono entrate in Cattedrale. In queste occasioni è interessante trovare con gli studenti il filo conduttore che lega le novità e gli adeguamenti alla tradizione ed alla storia.
Scegliendo tra le nuove opere si è deciso in questo percorso di analizzare la geometria della croce in figura 10a, progettata da Hidetoshi Nagasawa[10]. Anche l'occhio più inesperto si avvede subito del fatto che sia un'opera contemporanea, ma studiandola meglio si notano le analogie con il passato e con la storia della Cattedrale. Sarebbe a questo punto possibile inoltrarsi con gli studenti nello studio della struttura dell'opera[11], priva del Crocifisso come le Croci paleocristiane dell'epoca in cui fu eretta la prima costruzione della Cattedrale.
In questo saggio ci concentriamo sugli aspetti geometrici che possiamo dedurre.

Ricorrendo all'utilizzo di Geogebra e nuovamente importando l'immagine nella vista grafica si può realizzare la misura delle proporzioni [figura 10b].

Le misure effettuate con gli studenti e date in input al codice danno in effetti rapporti compatibili con quelli trovati conducendo la stessa procedura sui dati delle dimensioni della Cattedrale.

Vi è in tutto questo lo spunto per fare riflettere gli studenti sulle incertezze di misura tratte da una fotografia e quindi la possibilità di indurli a cercare nuovi dati o notizie per convalidare o meno questa analogia geometrica. Vi è anche però l'occasione per fare riflettere i ragazzi su come anche la matematica possa aiutarci a riflettere sulla storia, sull'arte e sulla simbologia celata delle opere.



La costruzione di poligoni regolari

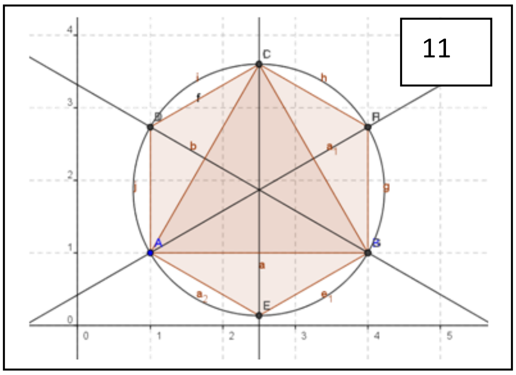
In questa sezione si descrivono alcuni schemi di laboratorio didattico concernenti i poligoni regolari ed il loro significato simbolico nell'arte.

Costruire poligoni regolari

Nell'ambito del corso di disegno si può spiegare ai ragazzi come costruire con squadre e compasso il pentagono regolare studiato con Geogebra nella sezione precedente. Dato un lato AB e calcolato d tale che

$$\frac{d}{AB} = \Phi$$

Si centra il compasso in A e si traccia una circonferenza di raggio d, si centra poi il compasso in B e si traccia la circonferenza di raggio AB. Il punto c generato dall'intersezione delle due circonferenze è il vertice di un triangolo che rappresenta un settore del pentagono regolare.



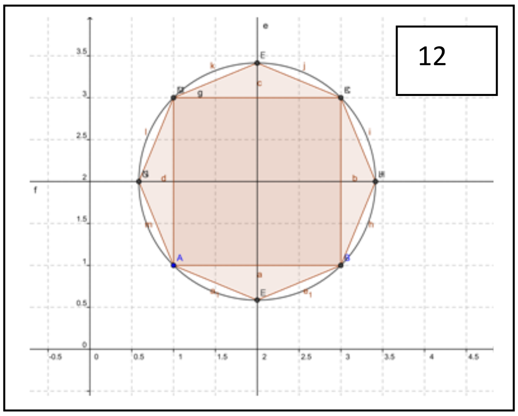
11

Ripetendo la procedura possiamo trovare il vertice E. Il vertice D si ricava quale intersezione delle circonferenze di raggio AB tracciate centrando il compasso in C ed E rispettivamente. Naturalmente è ancora più semplice costruire il triangolo equilatero ed il quadrato.

È dunque possibile costruire poligono con 6, 12, 24,… lati partendo dal triangolo equilatero e costruendo l'asse di ciascun lato.

La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero interseca gli assi nei vertici che completano l'esagono regolare.

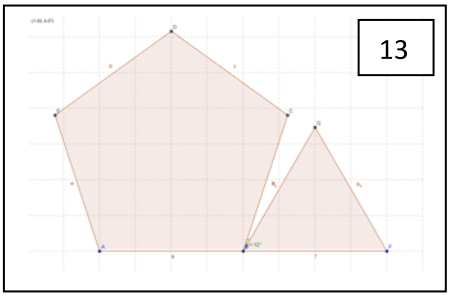
Partendo dall'esagono si possono nuovamente raddoppiare i lati così come si può ottenere poligoni a 8, 16, 32, … lati partendo dal quadrato e poligoni con 10, 20, … lati a partire dal pentagono.



12

Per ottenere altri poligoni occorre un maggiore sforzo logico.

I ragazzi possono intuire come costruire un quindecagono, cioè un poligono regolare a quindici lati.

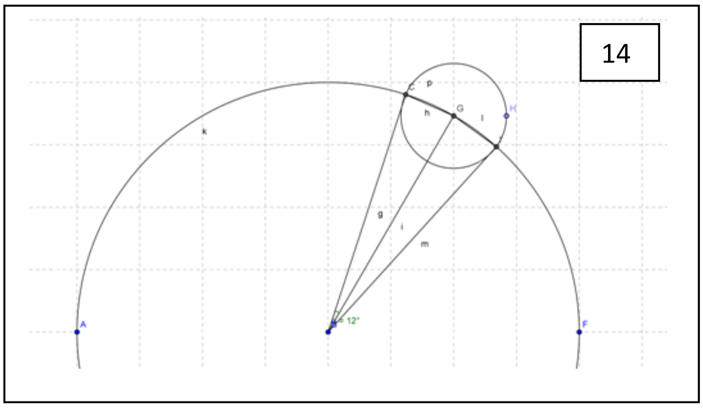


13

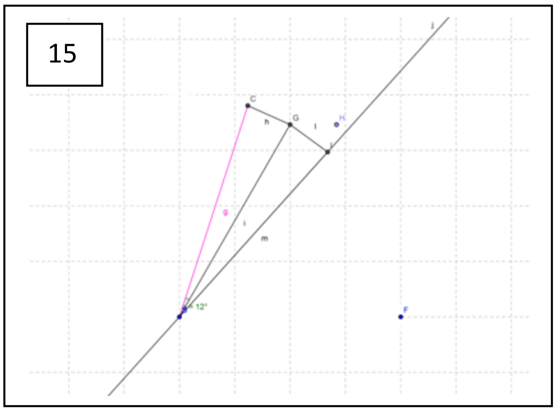
Costruzione del quindecagono

Facciamo ragionare i ragazzi sul valore degli angoli del quindecagono. È noto agli studenti che la somma degli angoli esterni di un poligono convesso è 360°, quindi l'angolo esterno del quindecagono è:

$$\alpha = \frac{360°}{15} = 24°$$



Vediamo come costruire un angolo di 24°. L'angolo esterno di un pentagono regolare vale 72° quello interno di un triangolo regolare vale 60°. Sottraendo l'angolo interno del triangolo a quello esterno del pentagono si ottiene dunque una angolo di 12° che raddoppiato dà l'angolo cercato. Raddoppiare l'angolo non è una operazione concettualmente difficile ma gli studenti si rendono conto che per realizzarla con il compasso occorre essere molto accurati. Bisogna infatti riportare il segmento CG sulla circonferenza di centro B. Il punto I può essere individuato puntando il compasso in G con apertura pari a CG. Dato che segmenti congruenti sottendono angoli al centro uguali è raggiunto lo scopo di ottenere una angolo di 24°.



Sulla retta j riportiamo un segmento adiacente ad CB e ad esso congruente. Abbiamo così due lati del quindecagono. L'operazione deve essere ripetuta fino a completare la figura.

Gauss e la costruzione dei poligoni regolari

Gauss a 19 anni affrontò il problema di ricercare quali poligoni regolari si potessero costruire con riga e compasso e dimostrò che tale costruzione è possibile quando il numero di lati N si può scomporre nel seguente modo:

$$N = 2^m p_1 p_2 \dots p_k$$

I fattori $p_k$sono detti numeri primi di Fermat o di Mersenne.

I numeri di Fermat e di Mersenne

Si definiscono numeri di Fermat gli interi generati mediante la seguente formula:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Tra essi quelli che sono anche primi sono i p_k.

La formula per generare i numeri di Mersenne è

$$F_n = 2^{2^n} - 1$$

Ed anche in questo caso ci interessano i numeri primi così generati.

Ancora una volta richiedendo ai ragazzi di scrivere codici che generino questi numeri li si vede fare uno sforzo logico ed arrivare al risultato voluto.

La tavola 4 mostra il codice scritto dai ragazzi dell' "Ariosto-Spallanzani".

I programma genera due successioni di numeri applicando la formula di Fermat e quella di Mersenne e salvandoli rispettivamente nei vettori a1 ed a2. I numeri in questione sono salvati in tabella 5a.

Occorre adesso selezionare tra essi quelli primi. Questa è forse la procedura cruciale del programma.

Iterazione	a1	a2
1	1	3
2	3	5
3	15	17
4	255	257

Tabella 5a: numeri generati dal programma

Iterazione	a
1	1
2	3
3	5
4	17
5	257

Tabella 5b: output del programma: i numeri primi tra quelli generati

È utile che gli studenti si confrontino su come risolvere il problema. Un numero è primo se non altri divisori a parte 1 ed il numero stesso e per questo la prima idea potrebbe essere quella di scrivere una struttura iterativa che divida a1 ed a2 per tutti i numeri compresi tra 2 e a1-1 ed a2-1 rispettivamente ed esaminare il resto intero della divisione. I ragazzi si accorgono subito che questo è ridondante: nessun numero ammette tra i suoi divisori numeri maggiori della propria metà.
La struttura iterativa si può dunque arrestare, come in tavola 4, dopo avere compiuto la metà delle iterazioni.
I numeri primi così trovati sono riportati in tabella 5b. Uno degli aspetti didattici della stesura di questo codice riguarda i problemi di memoria informatica che impone di affrontare. Il numero successivo, infatti, è 65537, un numero troppo elevato per essere memorizzato mediante una variabile intera del Pascal imponendo agli studenti di cambiare tipo di variabile in longint o real[12].

Qualche notizia storica
È possibile anche in questo punto del percorso inserire alcune notizie storiche sulla ricerca di questi numeri quando ancora non erano disponibili i nostri mezzi informatici.
La costruzione un 257-gono riuscì nel 1832 ai matematici Richelot e Schwendenwein. La più complessa impresa di costruire un 65537-gono fu compiuta da Hermes che vi spese dieci anni. La scatola contenente i fogli con i suoi elaborati è ancora conservata presso l'università di Gottinga.
Per i successivi numeri di Fermat i calcoli si fanno molto più complicati già per qunato riguarda il fatto di stabilirne la "primalità". Lo stesso Fermat riteneva erroneamente che il successivo numero della sua successione fosse primo: 4 294 967 297. Fu Eulero a dimostrare che 641 ne è divisore.

Tavola 4

```
Program Fermat;
 type vet= array[1..1000] of longint;
 var i, j, h, n, c1, c2: integer;
      pow, p: longint;
      a, a1, a2: vet;
 begin
   writeln('n');
   readln(n);
   pow:=1;
   for i:=1 to n do    //Calcolo di a
    begin
      pow:=pow*2;
      p:=1;
      for j:=1 to pow do
       begin
        p:=p*2;
      end;
      a[i]:=p;
    end;
  for i:=1 to n do   //Calcolo di a1 ed a2
    begin
      a1[i]:=a[i]-1;
      a2[i]:=a[i]+1;
    end;
   for i:=1 to n do    //Verifica se sono primi
     begin
       for h:=2 to (a1[i] div 2) do
          begin
            if (a1[i] mod h =0) then c1:=c1+1;
          end;
         if (c1=0) then writeln(a1[i], ' di Fermat');
     end;
    for i:=1 to n do
     begin
       for h:=2 to (a2[i] div 2) do
          begin
            if (a2[i] mod h =0) then c2:=c2+1;
          end;
         if (c2=0) then writeln(a2[i], ' di Fermat');
     end;
   readln;
 end.
```

Significato e simbologia dei poligoni regolari nell'arte

I poligoni regolari assumono nell'arte in particolare nelle opere di tema religioso il significato di ordine cosmico e di armonia trascendente. È questo uno dei motivi per i quali nei vari interventi eseguiti sulla facciata della Cattedrale di cui trattasi nella sezione 1 tanti sforzi sono stati spesi nel preservare l'angolo al vertice di un esagono regolare.
Vediamo ora in rassegna i significati attribuiti nel corso della storia ad alcuni poligoni regolari particolarmente significativi.
Il triangolo equilatero nella cultura greca ed orientale antica simboleggia la perfezione e l'ordine cosmico. Raffigurato con il vertice rivolto verso l'alto rappresenta la dimensione divina. Nel mondo cristiano ha naturalmente assunto una connotazione legata alla Trinità divina.
Il quadrato nella tradizione ellenica raffigura i quattro elementi: terra, acqua, fuoco ed aria che costituiscono la natura. Nel corso della storia ha mantenuto la sua valenza simbolica legata alla natura, al creato ed allo spazio. Molte chiese romaniche hanno base quadrata per simboleggiare la dimensione umana.
La forma ottagonale ha varii significati di origine remota legati, in particolare, alla storia dell'Ogdoade, cioè le quattro coppie di divinità che impersonano il caos delle origini nella teologia egizia antica. Queste divinità sono Nun e Naunet: l'acqua stagnante, Kek e Keket: l'oscurità, Heh ed Hehet, l'indefinito o l'infinito, Amun ed Amanuet, l'ignoto. Queste forze primordiali rappresentano la perfetta totalità riunite in numero di otto.
Nella simbologia cristiana il numero otto ha un forte legame con la Resurrezione di Cristo: l'*octava dies* (ottavo giorno) secondo la teologia cristiana è il nuovo giorno in cui il Cristo risorto porta la Salvezza all'umanità credente. L'ottagono inoltre è una figura che possiamo vedere come intermedia tra il quadrato, simbolo appunto della dimensione umana, ed il cerchio simbolo della dimensione divina. L'ottagono diviene in questo senso simbolo di transito o di dialogo con Dio.
La piante che costituiscono la base degli edifici sacri sono spesso poligoni regolari proprio perché ripropongono queste simbologie.
Volendo cercare nuovamente esempi e continuando le ricerche nella città di Reggio Emilia, si può rivolgere l'attenzione all'edificio sacro adiacente la Cattedrale: il Battistero [figura 16].


16

La base del Battistero di Reggio Emilia

Molto spesso le piante dei Battisteri sono ottagonali proprio per il significato di rinascita e di salvezza che il sacramento del Battesimo ricopre, significato che può essere espresso dall'ottagono.
Accade però di trovare piante rettangolari: il rettangolo simboleggia, in questo contesto, il sepolcro. Il neofita che riceve il Battesimo si cala nel sepolcro ove lascia la sua vita passata per riceverne una nuova dal Cristo risorto: questa la valenza celata nella apparentemente semplice geometria dell'edificio.

Tavola 5

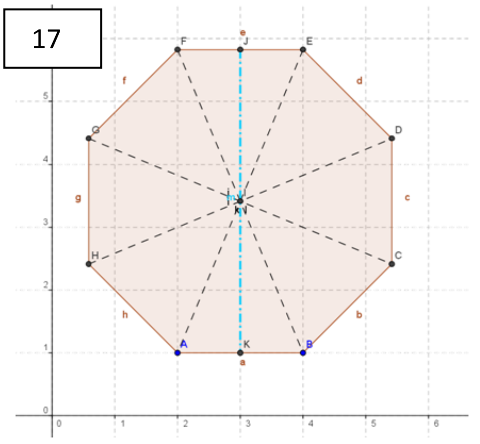
```
Program Ottagono;
 var JK, FB: real;
    ap, diag: real;
    rap1, rap2: real;
begin
   writeln('Inserisci JK');
   readln(JK);
   writeln('Inserisci FB');
   readln(FB);
   writeln('Inserisci ap');
   readln(apo);
   writeln('Inserisci diag');
   readln(diag);
   rap1:= FB/JK;
   rap2:= diag/ap;
   writeln(rap1-rap2);
   readln;
end.
```

In un percorso didattico in generale interessa che gli studenti ragionino su varie ipotesi, cerchino informazioni e le elaborino. Nel caso di Reggio Emilia il Battistero offre spunti di indagine più stimolanti rispetto ad altri edifici dalla storia più lineare. L'attuale pianta non rispecchia, infatti, nessuno degli schemi sopraccitati. L'odierna planimetria rassomiglia ad una T. Il Battistero, però, probabilmente coevo della Cattedrale, ha subito nei secoli mutamenti che ne hanno variato anche la forma della base. Occorre quindi andare alla ricerca di informazioni sull' edificio originale [5].

Grazie ai recenti restauri è stato possibile ricostruirne la storia con soddisfacente precisione [5]. La pianta originale era una croce greca i cui estremi erano raccordati da archi di circonferenza. Le misure [5] riportate in tabella 6 indicano che il modulo base, cioè le distanze fronte-fronte dei bracci, disegnano un virtuale ottagono regolare [figura 17].

Si può attuare un confronto tra i rapporti delle diagonali dell'ottagono regolare disegnato con Geogebra ed i rapporti tra le dimensioni del Battistero riportate dai documenti [5]. Il codice Pascal scritto a questo scopo è in tavola 5 e in tabella 6 sono raccolti i risultati (la nomenclatura dei parametri fa riferimento al codice in tavola 5 ed alla figura 17).

17



Dimensioni	Nomenclatura	Misure in piedi	Misure in metri
Doppia apotema	ap	58	18
Diagonale	diag	68	21

Tabella 6a: Misure della pianta originale del Battistero

Risultati del codice in tavola 5		
Rapporto FB/JK	Rapporto diag/ap	Differenza
1.08	1.17	0.09

Tabella 6b: output del codice in tavola 5

Le misure sono dunque compatibili con quelle di un ottagono regolare disegnato dalle congiungenti i bracci della croce greca. La discrepanza è sorprendentemente bassa indicando una grande precisione nella progettazione dell'edificio.

La base è mutata nei secoli a causa dell'ampliamento della sede vescovile che ha inglobato spazio originariamente appartenente al Battistero.
Anche in questo percorso si può dunque trovare nella matematica un modo per leggere lo spazio che ci circonda e trovare lo spunto per ricercarne e comprenderne la storia. Gli edifici sopraccitati ci parlano anche attraverso la loro geometria che ne rivela significati ed intenti profondi.

Appendice

Scelta del linguaggio Pascal

I codici presentati in questo elaborato possono essere scritti in varii linguaggi di programmazione. Il linguaggio scelto è il Pascal perché, grazie alla sua semplicità si presta particolarmente agli scopi didattici. Il Pascal inoltre richiede un grande rigore al programmatore, per cui è idoneo quando si vuole conferire agli studenti l'abitudine alla precisione ed all'utilizzo di strumenti logici.

Altri algoritmi in Pascal per il calcolo del rapporto aureo

La seguente formula ricorsiva costituisce un altro metodo per approssimare Φ, in campo razionale.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

```
Program Aurea_somma;
var n, i: integer;
    a1: real;
begin
 writeln('Calcolo dei termini della serie delle sezione aurea');
 repeat
  writeln('Digita il ternime della serie che vuoi calcolare (>3)');
  readln(n);
 until(n>3);
  a1:=1+(1/1);
  for i:=1 to n do
   begin
     a1:= 1+1/a1;
     writeln('Il', i, '° termine della successione è: ', a1);
   end;
 readln;
end.
```

In campo irrazionale abbiamo invece la seguente formula:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

```
Program Aurea_radq;
var n, i: integer;
    a1: real;
begin
 writeln('Calcolo dei termini della serie delle sezione aurea');
 repeat
   writeln('Digita il ternime della serie che vuoi calcolare (>1)');
   readln(n);
 until (n>1);
     a1:=sqrt(1+1/sqrt(1));

     for i:=1 to n do
         begin
          a1:= sqrt(1+a1);
          writeln('Il ', i, '° termine della serie è', a1);
         end;
 readln;
end.
```

Note

1. **Giamblico**: aprì una nota scuola neoplatonica ad Apamea, nella provincia romana di Siria. Allievo di Porfirio, si allontanò dalla dottrina del suo maestro per formulare una propria interpretazione del platonismo che accentuava la separazione tra anima e corpo e la missione soteriologica della filosofia.
2. **Stella a cinque punte:** era un simbolo cosmologico in uso nella cultura babilonese e rappresentava l'ordine cosmico.
3. Le convinzioni dei Pitagorici entrarono in profonda crisi a causa della scoperta dei numeri che chiamiamo irrazionali, cioè non deducibili da frazioni di interi.
4. **Gnomone aureo:** dicesi gnomone aureo il quadrato ricavato da un rettangolo aureo ed avente il lato pari al lato minore del triangolo stesso.
5. Per un approfondimento si veda anche la dimostrazione della irrazionalità della radice quadrata di 2.
6. **Matra-vitta:** metrica poetica con un numero costante di sillabe ma un numero arbitrario di lettere, in uso in India prima del X secolo. Problema risolubile grazie ai numeri che oggi chiamiamo successione di Fibonacci.
7. **Liceo Ariosto-Spallanzani**: le classi terze e quarte si sono dedicate a scrivere i codici in Pascal poi utilizzati per i calcoli ed a realizzare le viste grafiche con Geogebra.
8. **Alberico Malaguzzi:** quale massaro della Cattedrale se ne prese cura nel XIII secolo finanziando e seguendo i restauri.
9. **Prospero Sogari detto il Clemente** (architetto e scultore, 1516-1584): svolse la propria attività quasi esclusivamente a Reggio Emilia, tra i suoi lavori ricordiamo il Monumento Andreasi in Sant'Andrea a Mantova, il monumento del Vescovo Rangone ed il prezioso Crocifisso d'argento realizzato per il Duomo di Reggio Emilia, oggi conservato ed esposto al Museo Diocesano di Reggio Emilia e Guastalla.
10. **Hidetoshi Nagasawa**: nato in Manciuria nel 1940 si è laureato in Architettura ed interior design presso la Dama Daigaku di Tokyo. Dal 1967 si è stabilito in Italia dopo aver visitato moltissimi paesi orientali ed europei in una ricerca itinerante che lo ha condotto allo studio delle tendenze artistiche più all'avanguardia. La sua arte si caratterizza per l'originale fusione di elementi mitici e religiosi e per la capacità di esprimere mediante forme neo-dada concetti ed esperienze storiche antiche.
11. Sulle prime Croci non compare il Crocifisso, la cui presenza comincia a diffondersi a partire dal IV secolo. Fu infatti in quell'epoca che Teodosio il Grande soppresse la pena della croce e l'immagine non suscitò più analogie nefaste e cruente. Le prime Croci rievocavano spesso l'effige di un'àncora accompagnate, talora da pesci che ne simboleggiavano la valenza munifica e soteriologica. Il primo commento dei nostri studenti del liceo davanti alla fotografia della croce di Nagasawa è stato il fatto che somiglia ad un'àncora.
12. **Longint, real**: tipi di variabili del Pascal.

Bibliografia

Matematica e informatica

[1] *Peter M. Higgins* **Un mondo di matematica** edizioni Dedalo
[2] *Peter M. Higgins* **Divertirsi con la matematica** edizioni Dedalo
[3] *Piergiorgio Odifreddi* **Pitagora, Euclide e la nascita del pensiero scientifico** Le scienze n. 436, dicembre 2004
[4] *F. Ferrari* **Dispense corso di informatica**

Storia e beni culturali

[5] *William Montorsi* **Deputazione di Storia Patria per le antiche provincie modenesi** Serie n. 25, Edizioni Il Fiorino
[6] *Elio Monducci, Vittorio Nironi* **Il Duomo di Reggio Emilia** Bizzocchi editore
[7] **Museo diocesano di Reggio Emilia e Guastalla** (materiale informativo)
[8] *Tiziano Ghirelli* **Giornata Nazionale di studio sull'adeguamento degli spazi celebrativi**, Vicenza 16 aprile 2007