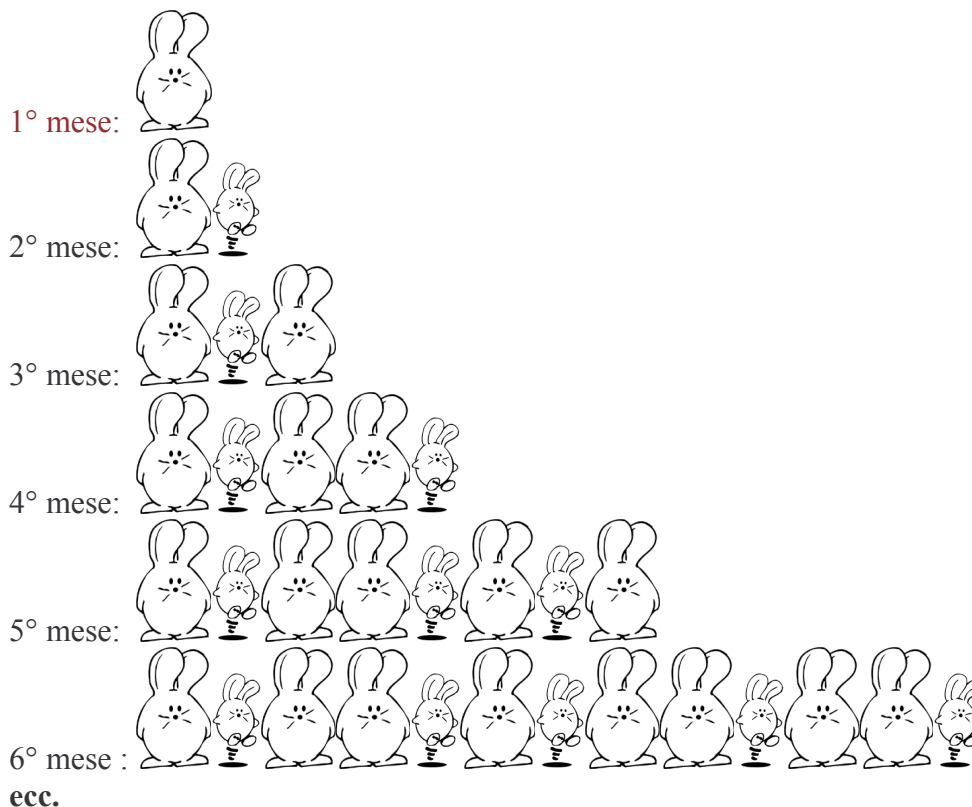


Considero particolarmente curiose e interessanti determinate sequenze prese in considerazione da Mario Livio, che ha presentato, dapprima, il famosissimo problema dei conigli di Fibonacci per sottolineare, poi, il concetto di *auto-similarità*. A pagina 148 del libro: **“La sezione aurea”** di **Mario Livio**, viene riportato, infatti, il seguente problema, tratto dal dodicesimo capitolo del **“Liber abaci”** di **Fibonacci**:

“Un uomo mise una coppia di conigli in un luogo circondato da tutti i lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?”



Nella **figura** che vedete qui sopra, l'**icona grande di coniglio** rappresenta **una coppia matura**, cioè fertile, l'**icona più piccola** rappresenta, invece, **una coppia troppo giovane** per procreare.

Il numero di coppie adulte forma la successione: **1, 1, 2, 3, 5, 8, ...** Inoltre le coppie giovani formano esattamente la stessa successione, con un mese di ritardo. L'autore precisa: "Per l'esattezza, la successione delle coppie giovani è

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Il numero totale di coppie è semplicemente uguale alla somma dei numeri corrispondenti delle due successioni, e forma a sua volta una successione uguale a quella delle coppie adulte, eccezion fatta per l'omissione del primo termine (1, 2, 3, 5, 8,...) La successione

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

in cui ciascun termine (a partire dal terzo) è uguale alla somma dei due termini precedenti è stata giustamente chiamata *di Fibonacci*, nel XIX secolo, dal matematico francese Edouard Lucas (1842-1891). Le successioni numeriche, in cui la relazione tra termini successivi si può esprimere con un'espressione matematica, si chiamano *ricorsive*, e quella di Fibonacci fu la prima di questo tipo conosciuta in Europa..." Da pagina 312 a pagina 315 dello stesso libro, si legge: "...Si consideri il seguente semplice algoritmo per la creazione della successione chiamata "aurea". **Si inizi con 1 e lo si sostituisca con 10. Si prosegua sostituendo ogni 1 con 10 e ogni 0 con 1.**

Si ottengono i seguenti passaggi:

1
 10
 101
 10110
 10110101
 1011010110110
 101101011011010110101
 ecc.

E' chiaro che siamo partiti da una legge locale (la sostituzione di 1 con 10 e di 0 con 1) ottenendo un ordine non-periodico su larga scala.

Va notato che il numero di 1 nella successione delle righe (1, 1, 2, 3, 5, 8) forma una successione di Fibonacci, così come il numero di 0 partendo dalla seconda riga. Inoltre, il rapporto tra numero di 1 e numero di 0 in ciascun termine tende a Φ con l'allungarsi della sequenza." L'autore continua sottolineando che, se si osserva con attenzione la stessa figura dei conigli, visionata prima, facendo corrispondere a 0 una coppia di conigli giovani e a 1 una coppia di conigli adulti in grado di procreare, allora "la sequenza appena descritta coincide esattamente con quella della crescita dell'immaginaria popolazione dei conigli" del famoso problema di Fibonacci.

"L'intera sequenza può essere generata anche partendo dai primi due termini (1 e 10) e aggiungendo il penultimo termine all'ultimo (come, per esempio, nella quarta riga il nuovo termine 10110 è uguale a 101, l'ultimo termine, seguito da 10, il penultimo termine).

Si ricorderà che l'auto-similitudine è la simmetria rispetto alla scala dimensionale. La spirale logaritmica è caratterizzata dall'auto-similitudine appunto nel senso che, ingrandita o rimpicciolita, conserva lo stesso, identico aspetto.[...] Nella successione aurea c'è auto-similitudine anche su scale differenti." Prendiamo in considerazione la sequenza:

10110101101101011...

Partendo da sinistra, ogni volta che s'incontra un 1 evidenziamo, sottolineandolo, un gruppo di tre simboli, e quando incontriamo uno 0 evidenziamo un gruppo di due simboli, senza sottolinearlo. Poiché la prima cifra è 1, evidenziamo le prime tre cifre (101); la seconda cifra è 0, perciò evidenziamo le due cifre seguenti (10); la terza cifra è 1, quindi evidenziamo le tre cifre seguenti; e così via.

La sequenza allora diventa la seguente:

101 10 101 101 10 101 ...

Adesso, da ogni gruppo di tre simboli si estraggono i primi due, mentre da ciascun gruppo di due simboli estraiamo il primo. Si osserva, così, che la sequenza dei simboli estratti è identica alla successione aurea:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 ...

Si può sottolineare la comparsa di un raggruppamento qualsiasi; viene scelto, ad esempio, il raggruppamento 10 e la successione si presenterà nel seguente modo:

10 1 10 10 1 10 1 10 10 1 10 ...

Viene considerato, adesso, come un *simbolo unico*, il raggruppamento che è stato scelto: 10; se segniamo il numero di posti dei quali occorre spostare ogni raggruppamento perché si sovrapponga al successivo (**va contato, cioè, il numero di posti di cui occorre spostare ogni 10, per sovrapporlo al 10 successivo**), si ottiene la sequenza:

2 1 2 2 1 2 1 ...

(il primo 10, infatti, deve spostarsi di due posti, il secondo di uno ecc...)

A questo punto, se nella sequenza sostituiamo ogni 2 con 1 e ciascun 1 con 0, otteniamo nuovamente la successione aurea. Insomma, in tale successione ogni schema si ripete con una regolarità, che è esattamente la stessa della successione aurea.

“Oggetti con questa proprietà, in cui il medesimo schema contiene repliche in miniatura di se stesso, come le matrioska russe, si chiamano *frattali*...”

Consiglio la lettura del libro di Mario Livio a coloro che volessero approfondire l'argomento.