

ANALISI LOGICHE DELLE PROVE ONTOLOGICHE DELL'ESISTENZA DI DIO: RUSSELL, GÖDEL E ODIFREDDI SU CARTESIO, LEIBNIZ E ANSELMO.

Esaminiamo ora la formalizzazione della prova ontologica, ossia la versione di Gödel della versione di Leibniz della versione di Cartesio della versione di Anselmo.

PIERGIORGIO ODIFREDDI¹

I

In un passo marginale di *On Denoting*², Russell applicò *en passant* la sua analisi logica dei sintagmi denotativi, e in particolare delle descrizioni definite della forma “Il così e così” (ovvero “il termine che ha la proprietà F”, come “L’attuale Presidente del Consiglio”), alla versione cartesiana della prova ontologica dell’esistenza di Dio, per mostrare che essa non è affatto una prova. La versione sillogistica tradizionale di tale “prova” (formalmente valida) è la seguente:

L’Essere perfettissimo ha tutte le perfezioni;
L’esistenza è una perfezione;
*Dunque, l’Essere perfettissimo ha l’esistenza (cioè esiste).*³

Nell’analisi di Russell essa diventa:

1. *C’è una e una sola entità x che è perfettissima ed ha tutte le perfezioni;*
2. *L’esistenza è una perfezione;*
3. *Dunque questa entità esiste.*

Anche se Russell non lo fa, è tuttavia possibile formalizzare la versione precedente dell’argomento ontologico utilizzando una notazione del calcolo dei predicati analoga a quella contenuta in *On Denoting*. Indicando con P il predicato “essere perfettissimo”, con \mathfrak{T} la classe di tutte le perfezioni, cioè, per definizione,

¹ Piergiorgio Odifreddi, *Il vangelo secondo la scienza*, Torino, Einaudi, 1999, “Dimostrazioni”, p. 144. Il saggio di Odifreddi *Una dimostrazione divina*, stampato come Appendice A in Kurt Gödel, *La prova matematica dell’esistenza di Dio*, a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Torino, Bollati Boringhieri, 2006, pp. 77-94, che verrà menzionato anche in seguito, è in massima parte un estratto delle pp. 134-150 del citato capitolo sulle “Dimostrazioni” de *Il vangelo secondo la scienza*.

² Bertrand Russell, *On Denoting*, “Mind”, 14, 1905, pp. 479-493, tr. it. *Sulla denotazione*, in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del Linguaggio*, Milano, Bompiani, 1973, ried. 2001, pp. 179-195 (il passo qui discusso si trova a p. 193).

³ Tale forma è giustificata, ad esempio, dal seguente passo della 5^a “meditazione” di Cartesio: “è (...) necessario ammettere che Dio esista, una volta ammesso che egli abbia tutte le perfezioni, dal momento che anche l’esistenza è una perfezione” (René Descartes, *Meditazioni metafisiche*, traduzione e introduzione di Sergio Lanucci, Roma-Bari, Laterza, 1997, 2000², p. 111).

di tutti i “predicati puramente positivi”⁴, con Φ un qualsiasi elemento di \mathfrak{T} , con E il predicato dell’esistenza e con d l’unico individuo che gode della proprietà di essere perfettissimo, la precedente formulazione assume la seguente forma:

1. $(\exists x) (Px \wedge (\Phi) ((\Phi \in \mathfrak{T}) \rightarrow \Phi x) \wedge (y) (Py \rightarrow y = x) \wedge (x = d))$
2. $E \in \mathfrak{T}$
3. Ed

La derivazione di 3 da 1 e 2 è formalmente valida e si può dimostrare con una semplice applicazione del *modus ponens* eliminando il quantificatore esistenziale e le congiunzioni da 1 e sostituendo x con d ed E con Φ . Tuttavia, conclude Russell, la correttezza della derivazione non deve far dimenticare che manca una prova della premessa, cioè dell’esistenza *effettiva* dell’entità perfettissima, e così tutta la dimostrazione finisce per assumere implicitamente ciò che deve dimostrare, cadendo in una circolarità disastrosa. Ma è la nota a piè di pagina relativa al passo in questione di *On Denoting* che costituisce la parte forse più interessante, perché Russell dice una cosa che sembra rendere impossibile in anticipo la futura prova di Gödel: «L’argomento può essere addotto per dimostrare validamente che tutti i membri della classe degli esseri perfettissimi esistono; si può anche dimostrare formalmente che questa classe non può avere *più* di un membro; ma, assumendo la definizione della perfezione quale possesso di tutti i predicati positivi, si può dimostrare quasi altrettanto formalmente che la classe non ha neanche un membro».

Presumibilmente Russell pensa al fatto che già per un numero sufficientemente ampio di predicati positivi, comunque siano intesi, diventa molto difficile definire *un* membro che li possieda tutti (si può essere, ad esempio, sia sommamente giusti che sommamente misericordiosi allo stesso tempo?); per un numero di predicati tendente all’infinito, poi, la probabilità di trovare un membro in grado di soddisfarli tutti tende a zero.

II

Anche se Gödel non cita mai Russell negli appunti relativi alla lunga elaborazione della sua prova (concepita nei primi anni ’40 e portata a termine nel 1970), egli sembra tuttavia lanciare una sfida proprio all’osservazione di Russell, visto che è sua intenzione dimostrare che la classe di tutte le proprietà positive

⁴ Qualunque cosa ciò voglia dire: per Leibniz, ad esempio, saranno *qualità* positive e assolute, mentre per Gödel, nella versione del 10 febbraio 1970 della prova ontologica (quella definitiva), saranno proprietà positive “nel senso morale estetico” (cfr. Gödel, *La prova matematica dell’esistenza di Dio*, cit., p. 62), dotate però di caratteristiche logico-formali ben precise poste come assiomi, come vedremo. Per una discussione dettagliata di questa nozione in Leibniz e Gödel, cfr. la “Nota Introduttiva” di Robert M. Adams a Gödel, *op. cit.*, pp. 23-57.

non è contraddittoria, non è vuota ed è soddisfatta da *un solo* membro, cioè Dio.⁵ Di fatto, quella di Gödel è una formalizzazione ultrasofisticata (calcolo dei predicati del secondo ordine e operatori modali) della formulazione leibniziana della prova ontologica (“L’essere perfettissimo e necessario, se è possibile, esiste; ma è possibile, dunque esiste”⁶), e dunque va un passo oltre rispetto alla prova discussa da Russell. La definizione di Dio da cui parte Gödel è però assai vicina a quella che abbiamo visto in precedenza: *x ha la proprietà D di essere Dio se e solo se per ogni proprietà Φ, se essa ha la proprietà P di essere positiva, allora x ha la proprietà Φ*. In simboli:

$$Dx \equiv (\Phi) (\mathcal{P}(\Phi) \rightarrow \Phi x),$$

che è quasi la stessa cosa del precedente $(\Phi) ((\Phi \in \mathcal{T}) \rightarrow \Phi x)$. Per il resto, i 5 assiomi, le 3 definizioni e i 2 teoremi della complessa prova di Gödel, che peraltro ha il merito di definire alcune caratteristiche formali e modali delle “proprietà positive”, servono a ricavare una stringa modale che asserisce l’esistenza *necessaria* di un dio siffatto, che però dipende dalla sua *possibilità*.

Trascrivendo per esteso i passaggi formalizzati della prova di Gödel del 1970, essa procede come segue:

Assioma 1: Se due o più proprietà sono positive, allora lo è anche il loro prodotto logico (cioè la loro intersezione).

⁵ Curiosamente, pur senza menzionare Russell, Roberto Magari mostrò nel 1988, cioè un anno dopo la prima pubblicazione dell’inedito di Gödel che conteneva la sua prova ontologica, che quest’ultima esprimeva il fianco, tra l’altro, proprio alla confutazione preconizzata da Russell. In un universo booleano infinito, infatti, la probabilità che l’intersezione di tutte le “proprietà positive” non sia vuota è infinitesima (cioè quasi zero), laddove per Gödel è cruciale che tale intersezione sia *necessariamente* non vuota, ovvero sia non vuota con grado di probabilità uguale a 1, visto che essa alla fine coincide con Dio (cfr. Roberto Magari, *Logica e teofilia. Osservazioni su una dimostrazione attribuita a Kurt Gödel*, in “Notizie di Logica”, vol. 7, n. 4, 1988, pp. 11-20; ora ristampato come Appendice B in Gödel, *op. cit.*, pp. 99-120: cfr. in part. § 2, p. 111).

⁶ Sin dal 1676 (per esempio in un breve scritto dal titolo *Sull’esistenza dell’Ente perfettissimo*) e fino alla *Monadologia* (1714), Leibniz cercò di dimostrare la verità di un asserto modale che affermasse la possibilità logica, cioè la non contraddittorietà del concetto dell’Essere perfettissimo. In tal modo l’affermazione dell’esistenza necessaria di Dio, cioè dell’Essere la cui Essenza implica l’Esistenza, sarebbe seguita per *modus ponens* dall’enunciato condizionale già implicitamente dimostrato da Cartesio: *se Dio è possibile, allora esiste in atto (e necessariamente)*. Il punto cruciale della costruzione di un tale concetto consisteva nel considerare “positive” e indipendenti tutte le perfezioni, in modo tale che il loro prodotto logico non contenesse alcunché di negativo e non corresse il rischio di essere reso falso da una contraddizione tra proprietà logicamente opposte. Nella versione dei celebri §§ 44 e 45 della *Monadologia*, l’argomento di Leibniz è il seguente: “all’Essere necessario è sufficiente essere possibile per essere in atto. Così, solamente Dio, ovvero l’Essere necessario, ha questo privilegio: Posto che il suo Essere sia possibile, Egli non può non esistere. Ora, già questo è sufficiente per conoscere *a priori* l’Esistenza di Dio; nulla può infatti impedire la possibilità di ciò che non comporta nessuna limitazione, nessuna negazione e, di conseguenza, nessuna contraddizione” (Gottfried W. Leibniz, *Monadologia*, a cura di Salvatore Cariatì, Milano, Rusconi, 1997, p. 77).

Assioma 2: data una qualsiasi proprietà, o essa è positiva o lo è la sua negazione (disgiunzione esclusiva).

Definizione 1: Dio gode di tutte le proprietà positive.

Definizione 2: Una proprietà è l'essenza di qualcosa se e solo se ogni altra proprietà di quest'ultima è implicata necessariamente dalla prima.

Assioma 3: Se una proprietà è positiva, allora lo è necessariamente, e viceversa.

Teorema 1: Se qualcosa ha la proprietà di essere Dio, allora tale proprietà ne è l'essenza.

Definizione 3: Qualcosa esiste necessariamente se e solo se, per ogni proprietà, se essa è l'essenza di qualcosa, quest'ultima necessariamente esiste e gode di tale proprietà (ovvero, nel linguaggio tradizionale: qualcosa esiste necessariamente se e solo se la sua essenza ne implica l'esistenza).

Assioma 4: L'esistenza necessaria è una proprietà positiva.

Teorema 2: Se qualcosa è Dio, allora è necessario che esista qualcosa che sia Dio.

Assioma 5: Se una proprietà è positiva ed essa ne implica necessariamente un'altra, allora anche quest'ultima è positiva (da ciò segue anche che la proprietà di essere identici a se stessi è positiva, e la sua negazione è negativa).

L'Assioma 5 garantisce che le proprietà positive formano un sistema compatibile (cioè non contraddittorio), per cui, conclude Gödel un po' troppo circolarmente (come nota Adams⁷), «il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile»⁸. Ma questo equivale a dire semplicemente che è possibile che Dio esista, ovvero, in simboli, $\diamond(\exists x) Dx$ (dove \diamond è l'operatore modale della possibilità, il cui duale, cioè l'operatore della necessità, è \square). È esattamente questo – come ben sapeva Leibniz – che permette la decisiva applicazione del *modus ponens* al condizionale di Cartesio: *se Dio è possibile, allora esiste in atto (e necessariamente)*. Gödel, infatti, deduce tale condizionale piuttosto sorprendente, in simboli $\diamond(\exists x) Dx \rightarrow \square(\exists y) Dy$, dal Teorema 2 per successive trasformazioni formalmente valide, usando anche il cosiddetto sistema S5 di Lewis, un potente sistema di logica modale che include il seguente assioma: $\diamond\square p \leftrightarrow \square p$. Infatti, dal Teorema 2, in simboli $Dx \rightarrow \square(\exists y) Dy$, si ha successivamente:

$(\exists x) Dx \rightarrow \square(\exists y) Dy$ (per introduzione di \exists nell'antecedente)

$\diamond(\exists x) Dx \rightarrow \diamond\square(\exists y) Dy$ (per introduzione di \diamond)

$\diamond(\exists x) Dx \rightarrow \square(\exists y) Dy$ (per l'assioma di S5).

A questo punto, da $\diamond(\exists x) Dx \rightarrow \square(\exists y) Dy$ e $\diamond(\exists x) Dx$, per *modus ponens*, segue immediatamente $\square(\exists y) Dy$, ovvero la stringa che asserisce l'esistenza necessaria di Dio.

⁷ Cfr. Adams, "Nota introduttiva", cit., p. 45.

⁸ Gödel, *op. cit.*, p. 62.

A quanto pare, lo stesso Gödel era perplesso sulla liceità dell'applicazione del controverso assioma di S5 in una prova di questo tipo⁹. Tuttavia, il punto veramente debole di tutta la sua prova resta il vizio di circolarità che serpeggia in essa e che è stato rilevato da molti. Come accennato, la decisiva affermazione della possibilità logica dell'esistenza di Dio, $\diamond(\exists x) Dx$, è già implicita nell'Assioma 5, per cui *quod erat demonstrandum* era già praticamente e surrettiziamente assunto, e non solo nell'Assioma 5. Il Teorema 1, la Definizione 3 e l'Assioma 4, per esempio, già presuppongono che essere Dio, cioè essere l'Essere che esiste necessariamente, è positivo, il che equivale ad assumere con largo anticipo l'esistenza di Colui di cui si sta cercando la *possibilità* dell'esistenza. Per non dire del fatto imbarazzante che, come nota Odifreddi, «Dio è definito come un essere con certe proprietà, ma le proprietà sono godute dagli oggetti del mondo: dunque *Dio è un'entità che fa parte del mondo*, un essere immanente e non trascendente. Inoltre, l'unicità di Dio è solo relativa alla classe di proprietà positive considerate: ogni classe ha un suo unico Dio, ma le classi sono tante. Più che di Dio, si dovrebbe forse parlare di un capoclasse»¹⁰.

III

A proposito di Odifreddi, vorrei discutere qui una sua analisi logica della prima versione della prova ontologica, quella avanzata nell'XI secolo da Anselmo d'Aosta. Odifreddi torna spesso sulla prova di Anselmo¹¹, ma qui io mi soffermerò su un passo de *Il diavolo in cattedra*, perché Odifreddi ne riconduce esplicitamente la forma argomentativa alla *Consequentia mirabilis*. Come cercherò di mostrare sulla base di una più attenta lettura del secondo capitolo del *Pro-slogion*, questo è un errore, perché la prova di Anselmo, nella parte in questione, è una più complessa forma di *Reductio ad absurdum*. La *Consequentia mirabilis*, che ha una forma del tipo $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$, già attestata in Sesto Empirico (*Contro i matematici*, VIII, 281-284) ed attribuita allo stoico Crisippo, è un caso particolare, degenerato su una sola proposizione, di *Reductio ad absurdum*, e la prova di Anselmo non è di questo tipo.

⁹ Cfr. Adams, "Nota introduttiva", cit., p. 31. Anche se *prima facie* sembra in contrasto con i teoremi fondamentali della logica modale, asserendo un'implicazione dalla possibilità alla necessità, l'assioma è derivabile. Esso, infatti, equivale ai due seguenti condizionali: $(\diamond \Box p \rightarrow \Box p)$ e $(\Box p \rightarrow \diamond \Box p)$. Il secondo è valido perché non è altro che una forma della regola (valida) $\alpha \rightarrow \diamond \alpha$, con $\alpha = \Box p$. Il primo si deriva dalla forma modale del principio del terzo escluso: $\Box p \vee \Box \neg p$, da cui, per la definizione della disgiunzione, $\neg \Box \neg p \rightarrow \Box p$, ovvero $\diamond \Box p \rightarrow \Box p$, dato che per i due operatori modali vale la seguente equivalenza: $\neg \Box \neg p \equiv_{\text{def}} \diamond p$ ("p non è necessariamente falso" equivale a "p è possibile"). Su questo punto, cfr. ad es. Odifreddi, *Il diavolo in cattedra. La logica da Aristotele a Gödel*, Torino, Einaudi, 2003, p. 122.

¹⁰ Odifreddi, *Una dimostrazione divina*, in Gödel, *op. cit.*, p. 93 (= *Il vangelo secondo la scienza*, cit., p. 149).

¹¹ Cfr. ad es. *Il vangelo secondo la scienza*, cit., pp. 137-139 (riprese in *Una dimostrazione divina*, cit., pp. 79-81) e *Le menzogne di Ulisse*, Milano, Longanesi, 2004, pp. 92-93.

Scrivono Odifreddi: «Poiché sia la perplessità che l'attrazione suscitate dalla *consequentia mirabilis* derivano dal fatto che essa permette di dimostrare una proposizione in maniera autonoma, senza appelli a nient'altro che a se stessa, non è sorprendente che Anselmo abbia anche cercato, con scarso successo, di applicarla all'esistenza di Dio. L'argomento del suo *Proslogion* è il seguente. Anzitutto, definiamo Dio come "ciò di cui non si può pensare niente di più grande": se Dio non esistesse, potremmo pensarne uno con le stesse proprietà ma esistente, e dunque "più grande". Il che dovrebbe dimostrare che se Dio non esiste, allora esiste. Dunque, che esiste.»¹². Alla luce dell'argomentazione svolta da Anselmo tra i §§ 2 e 5 del secondo capitolo del *Proslogion*, si può dire che qui Odifreddi commette un duplice errore: 1) a voler essere schematici, la forma generale dell'argomentazione, che, come vedremo, passa anche attraverso un *modus tollens*, è tutt'altro che di "scarso successo" ed è del tipo: Se Dio non esiste, allora Dio non è Dio; dunque, Dio esiste (per *Reductio ad absurdum*); 2) è comunque semplicistico e fuorviante trattare l'argomento di Anselmo nell'ambito del calcolo proposizionale (come fa Odifreddi), perché esso è formalizzabile rigorosamente solo nell'ambito del calcolo dei predicati, ovvero in un linguaggio del primo ordine con identità.

Innanzitutto, va precisato che nel § 3 Anselmo introduce un'importante distinzione nella nozione di esistenza, precisando che si danno un'esistenza *in intellectu*, cioè puramente mentale (indichiamo con E_m questo predicato), e un'esistenza *in re*, cioè reale (indichiamo con E_r questo predicato). Questa doppia articolazione della nozione di esistenza, è lecito inferire dal testo, determina una gerarchia *ontologica* ben precisa di quattro livelli nell'essere che, dal più alto al più basso, possono ordinarsi nel modo seguente:

- 1) Ciò che gode sia di E_m che di E_r (le cose reali e di cui c'è concetto)
- 2) Ciò che gode di E_r ma non di E_m (le cose reali e di cui non c'è concetto)
- 3) Ciò che gode di E_m ma non di E_r (i concetti senza riferimento nella realtà)
- 4) Ciò che non gode né di E_m né di E_r (il nulla).

La mossa di Anselmo, a questo punto, consiste nel mostrare che l'inevitabile definizione concettuale di Dio come *aliquid quo nihil maius cogitari possit* (già avanzata come oggetto di credenza per fede alla fine del § 1) implica necessariamente, cioè analiticamente, che egli appartiene alla prima categoria di enti, tra i quali peraltro è l'ente supremo. Chiamando D la proprietà di essere Dio e M la proprietà di essere "il maggiore in assoluto dal punto di vista ontologico", avremo per definizione:

$$(1) \quad Dx \equiv Mx$$

e, come teorema,

¹² Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, cit., p. 70.

$$(2) \quad (x) (Mx \rightarrow (E_mx \wedge E_r x))$$

Un corollario immediato di tale teorema è che vi è un solo ente che soddisfa la proprietà M, sicché, russellianamente, possiamo scrivere:

$$(3) \quad (\exists x) (Mx \wedge (y) (My \rightarrow y = x))$$

Da (2) e (3), eliminando i quantificatori e la congiunzione, e ponendo altresì $x = d$ (dove d è una costante individuale che denota l'unico ente che gode della proprietà D, equivalente a M), per *modus ponens* si ricava $E_md \wedge E_r d$, ovvero che Dio esiste sia *in intellectu* che *in re*.

Quello sopra esposto è l'argomento *diretto* di Anselmo (implicito ma inequivocabile), che sta alla base di quello *indiretto* (esplicito e ben più noto) volto a confutare l'*insipiens* di *Salmi* 14,1 e 53,1, il quale *dixit in corde suo: non est deus* (§ 2). L'argomento contro l'insipiente non è altro che una prova, basata sull'ontologia gerarchica suddetta e sul teorema (2), dell'impossibilità di asserire che Dio gode *solo* di E_m . Per Anselmo, l'insipiente deve intanto assumere necessariamente la definizione (1), perché altrimenti non saprebbe di cosa sta parlando (§ 2). Nel fare questa assunzione, l'insipiente ammette automaticamente che Dio gode di E_m *nella sua stessa mente*. Ma nel momento in cui nega verbalmente che Dio goda *anche* di E_r , per il teorema (2) egli cade nella contraddizione di affermare e negare contemporaneamente che Dio goda di M, dato che ha già assunto la (1). L'insipiente, in sostanza, non capisce che, assumendo la (1), egli deve necessariamente arrendersi all'evidenza di (2) e (3), altrimenti ciò che esiste nella sua mente risulterebbe un'entità contraddittoria (sarebbe e non sarebbe quella che è). Infatti, godendo solo di E_m , cioè collocandosi al terzo livello della gerarchia ontologica, sarebbe possibile definire concettualmente un'entità che, godendo ad esempio anche di E_r , cioè collocandosi al primo livello della gerarchia, sarebbe "maggiore" di essa. In tal modo ciò che è "il maggiore" non sarebbe "il maggiore": *Si ergo id quo maius cogitari non potest, est in solo intellectu: id ipsum quo maius cogitari non potest, est quo maius cogitari potest* (§ 5). È questa la *Reductio ad absurdum* di Anselmo, che evidentemente non è una *Consequentia mirabilis*, perché contiene, tra l'altro, un'assunzione, un teorema e un'applicazione del *modus tollens*, come si vede chiaramente svolgendo in maniera formale l'argomento:

- | | |
|--|---|
| 1. Md | (Assunzione) |
| 2. E_md | (Assunzione) |
| 3. $E_r d$ | (Tesi di Anselmo) |
| 4. $\neg E_r d$ | (Tesi dell'insipiente, posta per assurdo) |
| 5. $(x) (Mx \rightarrow (E_mx \wedge E_r x))$ | (Teorema) |
| 6. $E_md \wedge \neg E_r d$ | (da 2 e 4 per introduz. di \wedge) |
| 7. $Md \rightarrow (E_md \wedge E_r d)$ | (da 5 per eliminazione del QU) |
| 8. $(E_md \wedge \neg E_r d) \rightarrow \neg (E_md \wedge E_r d)$ | (da 6 per def. di \wedge) |

- | | |
|--------------------------------|--|
| 9. $\neg (E_m d \wedge E_r d)$ | (da 6 e 8 per <i>modus ponens</i>) |
| 10. $\neg Md$ | (da 7 e 9 per <i>modus tollens</i>) |
| 11. $Md \wedge \neg Md$ | (da 1 e 10 per introduz. di \wedge) |
| 12. $\neg (\neg E_r d)$ | (da 4 e 11 per RAA) |
| 13. $E_r d$ | (da 12 per doppia negazione) |

Come si vede, l'argomento di Anselmo, ben più articolato della esemplificazione di Odifreddi, è perfettamente valido sul piano formale e si fonda su precise assunzioni di carattere ontologico relative a una gerarchia dell'essere, a sua volta legata a una precisa distinzione tra le due modalità dell'esistenza *in intellectu* e *in re*. La fallacia dell'argomento, dunque, non risiede nella sua forma logica, ma nelle assunzioni metafisiche di sfondo, che già presuppongono l'esistenza *in re* dell'ordine dell'essere e del suo artefice.

Marco Trainito, 13-14 e 21 agosto 2007