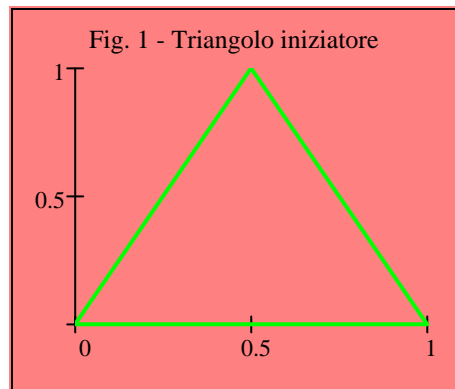


I Frattali di Sierpinski

STUDIO DELLE FIGURE DI SIERPINSKI TRAMITE IL METODO DEI SISTEMI ITERATI DI FUNZIONI

1)- Il sistema di trasformazioni alla base delle figure di Sierpinski

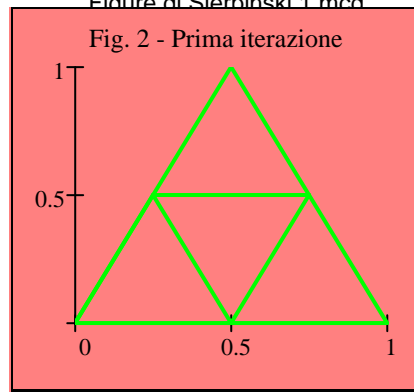
Le figure di Sierpinski, più precisamente il triangolo di Sierpinski, sono tra i casi più semplici per introdurre lo studio dei Frattali tramite il metodo dei sistemi iterati di trasformate geometriche. Se consideriamo un sistema di riferimento bidimensionale (il caso più semplice) e come figura iniziale un triangolo isoscele di vertici $(0; 0)$, $(0,5; 1)$, $(1; 0)$ (*Fig. 1*), possiamo applicare ad ogni vertice le trasformazioni (1).



$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{4} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} + \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{2} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \end{array} \right. \quad (1)$$

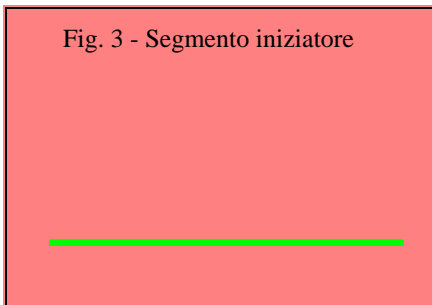
Applicando una volta queste trasformazioni si ottengono tre copie ridotte della metà e traslate di mezza unità rispetto all'origine del sistema di riferimento (*Fig. 2*); questa va interpretata come il triangolo iniziatore sottratto del triangolo capovolto centrale. Iterando più volte le trasformazioni (1) sulla figura finale ottenuta si ottiene un frattale, uno dei più semplici e più studiati al mondo.





2)- Il caso unidimensionale: l'insieme di Cantor

Il caso più semplice è quello unidimensionale, in questo caso la figura iniziatrice è un segmento di lunghezza unitaria (Fig. 3) ed ai suoi estremi si applicano le trasformazioni (2)



$$x_{\text{new}} = \frac{1}{3} \cdot x_{\text{old}} \quad x_{\text{new}} = \frac{1}{3} \cdot x_{\text{old}} + \frac{2}{3} \quad (2)$$

La prima trasformazione è una **riduzione di scala 1/3** del segmento iniziatore (va applicata due volte, una per ogni estremo), mentre la seconda è una **riduzione di scala 1/3 con una traslazione sull'asse, di spostamento 2/3** del segmento iniziatore (anche questa va applicata per ciascun estremo); Le frazioni scelte per la riduzione e la traslazione sono tali da rendere la figura frattale simmetrica rispetto agli estremi del segmento iniziatore; qualsiasi altro valore modificherebbe questa simmetria ma non la struttura del frattale; infatti è proprio il tipo di trasformazioni e la sequenza di quest'ultime ad influenzare la struttura della figura frattale. Per costruire l'insieme di Cantor definiamo una funzione il cui parametro è il numero d'iterazioni che vogliamo eseguire; questa a sua volta chiamerò una funzione che applicherà due trasformazioni geometriche su una nuova matrice di coordinate. Le due trasformazioni geometriche sono definite tramite altre due funzioni: una per la riduzione di scala che avrà come argomenti la coordinata vecchia e il fattore di riduzione e l'altra per la traslazione che avrà come argomenti la coordinata vecchia e la misura dello spostamento.

Implementazione delle funzioni

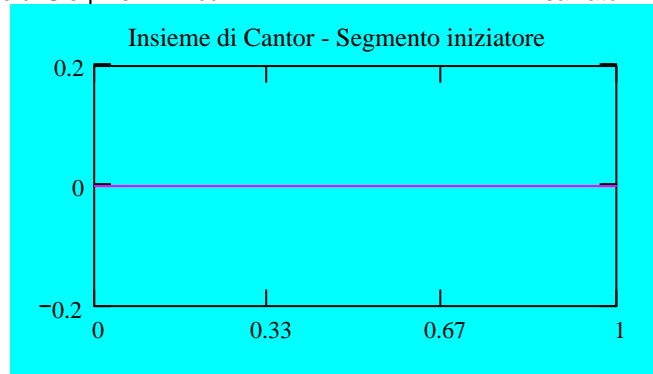
L'implementazione delle trasformazioni geometriche iterate per l'insieme di Cantor, fatta nelle funzioni precedenti, lavora solo sugli estremi dei segmenti;

di questo bisogna tenere conto quando si visualizza il grafico che sarà costituito solamente da punti; se si vuole avere un grafico più

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 0 \\ V_s := \text{InsiemeDiCantor}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$

fedele (soprattutto per poche iterazioni) è necessario implementare funzioni che uniscano opportunamente gli estremi dei segmenti ottenuti dalle trasformazioni. Proviamo ora a visualizzare l'insieme di Cantor per la seguente sequenza d'iterazioni : $\{0; 1; 2; 3\}$

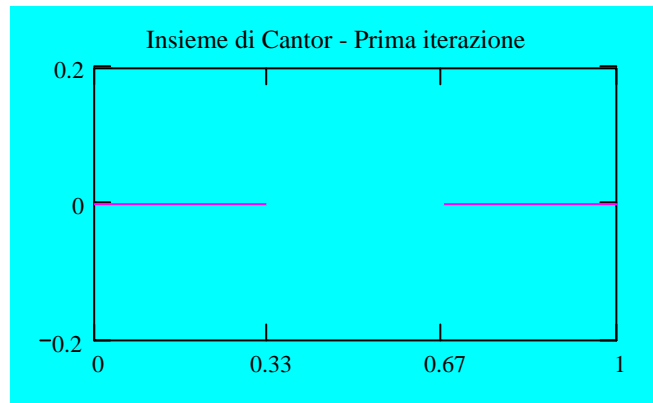
$$V_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 1 \\ V_s := \text{InsiemeDiCantor}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$

$$V_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.33333 & 0 \\ 0.66667 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_s := \begin{pmatrix} v_{s1,0} & v_{s1,1} \\ v_{s2,0} & v_{s2,1} \end{pmatrix}$$



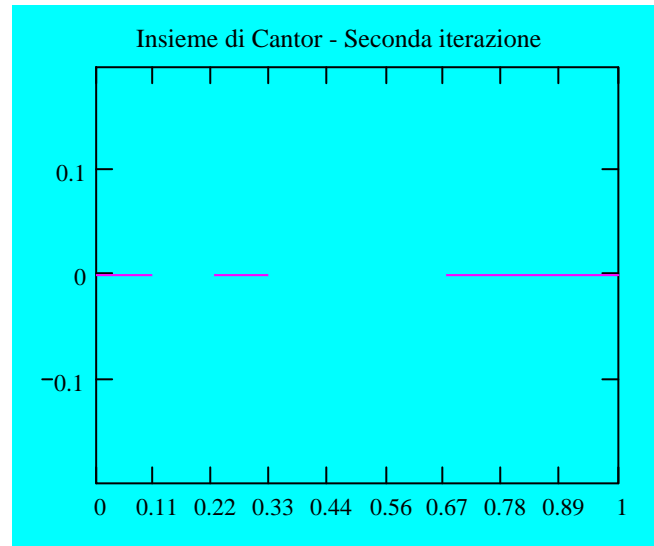
$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 2 \\ V_s := \text{InsiemeDiCantor}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$

$$V_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.11111 & 0 \\ 0.22222 & 0 \\ 0.33333 & 0 \\ 0.66667 & 0 \\ 0.77778 & 0 \\ 0.88889 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_s := \begin{pmatrix} V_{s_{1,0}} & V_{s_{1,1}} \\ V_{s_{2,0}} & V_{s_{2,1}} \end{pmatrix}$$

$$O1_s := \begin{pmatrix} V_{s_{3,0}} & V_{s_{3,1}} \\ V_{s_{4,0}} & V_{s_{4,1}} \end{pmatrix}$$

$$O2_s := \begin{pmatrix} V_{s_{5,0}} & V_{s_{5,1}} \\ V_{s_{6,0}} & V_{s_{6,1}} \end{pmatrix}$$



Da queste prime iterazioni, si osserva che la lunghezza dell'insieme diminuisce con al seguente legge

$$\text{Lungh}(n_{\text{iter}}) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots \right) = 1 - \left(\frac{2^0}{3^1} + \frac{2^1}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots \right) = 1 - \sum_{n=1}^{n_{\text{iter}}} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

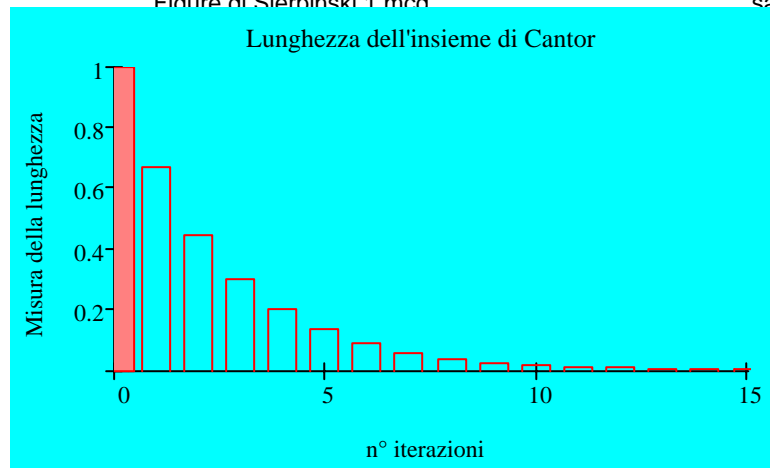
mentre il numero di segmenti aumenta con la seguente legge

$$\text{Num_Segmenti}(n_{\text{iter}}) = (1, 2, 4, 8, 16, \dots) = (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots) = 2^{n_{\text{iter}}}$$

La prima relazione converge a zero, come si può osservare dall'operazione al limite e dal grafico seguente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i} \right) \rightarrow 0$$

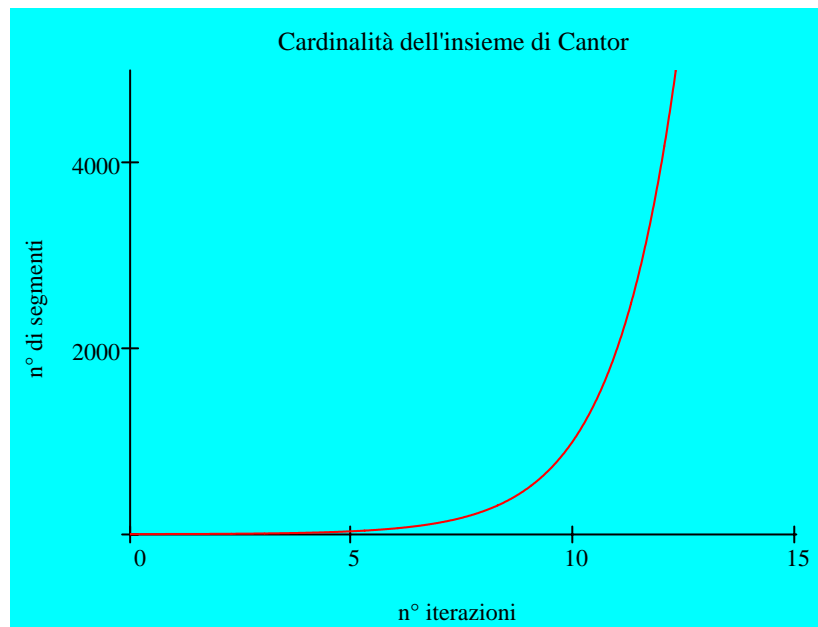
$$\text{Lungh}(n) := 1 - \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i}$$



La seconda relazione è una legge di potenza ed essa, all'aumentare del numero d'iterazione diverge, come si può osservare dal limite e dal grafico seguenti

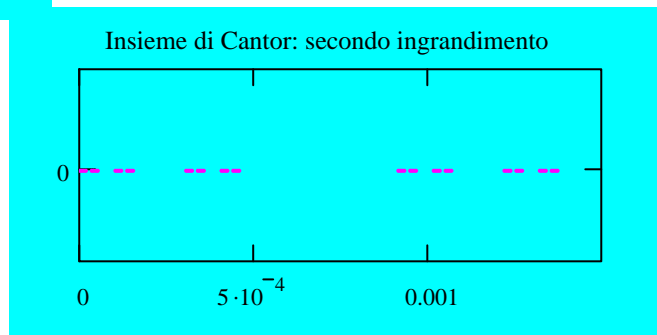
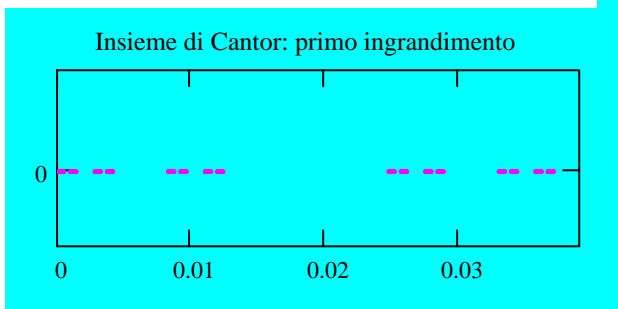
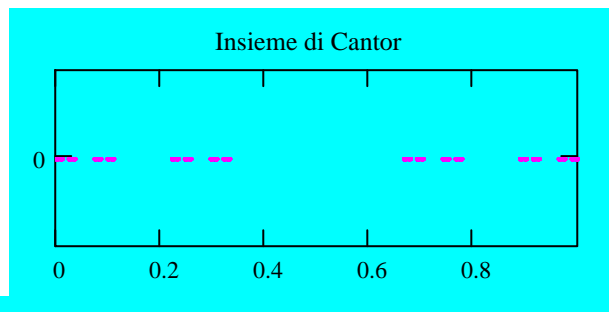
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \rightarrow \infty$$

$$\text{Num_Seg}(n) := 2^n$$



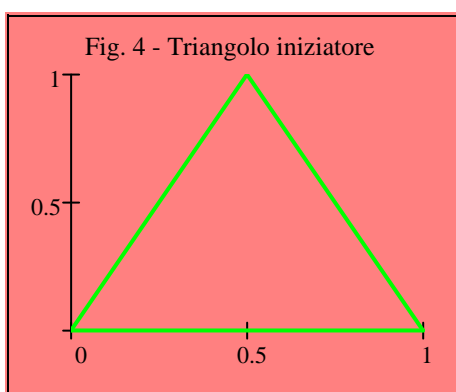
Ecco di seguito la rappresentazione dell'insieme di Cantor per un numero relativamente elevato d'iterazioni; ingrandendo successivamente la porzione di segmenti vicini all'origine si può notare la natura frattale dell'insieme.

$$\begin{cases} n_{\text{iter}} := 11 \\ V_S := \text{InsiemeDiCantor}(n_{\text{iter}}) \end{cases}$$



2)- Caso bidimensionale: il reticolo di Sierpinski

Nel caso bidimensionale la figura iniziatrice può essere composta da un triangolo isoscele (Fig. 4) (ma non necessariamente, visto che il frattale viene determinato dalla sequenza e dal tipo di trasformazioni) ai cui vertici vengono applicate le trasformazioni (3)



$$\begin{cases} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{4} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{2} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \end{cases}$$

Descriviamo le tre trasformazioni:

- La prima trasformazione è una **riduzione di scala 1/2** del triangolo iniziatore; va applicata tre volte, una per ogni vertice; ciascun vertice è identificato da una coppia di coordinate.
- La seconda trasformazione è una **riduzione di scala 1/2 con una traslazione sull'asse delle ascisse, di spostamento 1/4, e uno spostamento di 1/2 sull'asse delle ordinate** del triangolo iniziatore.
- La terza trasformazione si compone di una **riduzione di scala 1/2 con una traslazione sull'asse delle ascisse, di spostamento 1/2** sempre riferite al triangolo iniziatore.

Per costruire il reticolo di Sierpinski utilizzeremo le funzioni $\text{RiduciScala}(c_{\text{vecchia}}, \text{fatt}_{\text{rid}})$ e

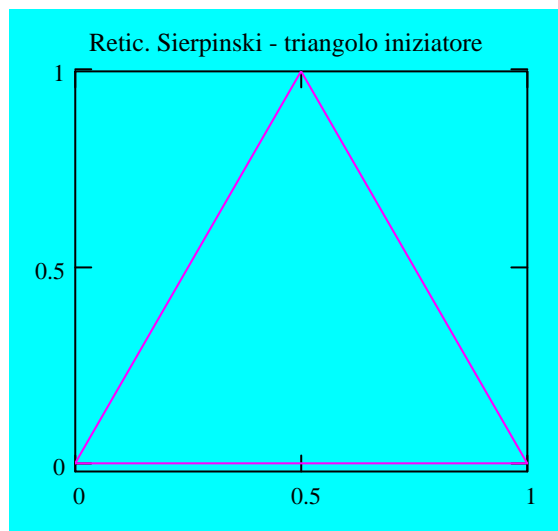
$\text{Trasla}(c_{\text{vecchia}}, \text{mis}_{\text{spost}})$, già definite, all'interno di tre funzioni che applicheranno le tre trasformazioni geometriche secondo la sequenza riportata.

► Implementazione delle funzioni

L'implementazione delle trasformazioni geometriche iterate per il reticolo di Sierpinski, fatta nelle funzioni precedenti, lavora solo sui vertici dei triangoli; difatti l'ultima funzione è stata implementata per connettere questi vertici secondo lo schema corretto (il problema tuttavia è stato risolto solo per un numero d'iterazioni minore o uguale a tre). Come abbiamo fatto per il caso unidimensionale, proviamo ora a visualizzare il reticolo di Sierpinski per la seguente sequenza d'iterazioni $\{0; 1; 2; 3\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 0 \\ V_t := \text{ReticoloSierpinski}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$

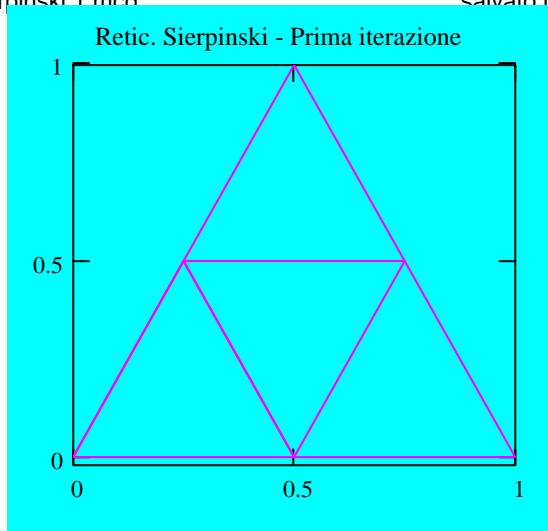
$$V_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 1 \\ V_t := \text{ReticoloSierpinski}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$

$V_t =$

| | 0 | 1 |
|----|------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.25 | 0.5 |
| 2 | 0.5 | 0 |
| 3 | 0 | 0 |
| 4 | 0.25 | 0.5 |
| 5 | 0.5 | 1 |
| 6 | 0.75 | 0.5 |
| 7 | 0.25 | 0.5 |
| 8 | 0.5 | 0 |
| 9 | 0.75 | 0.5 |
| 10 | 1 | 0 |

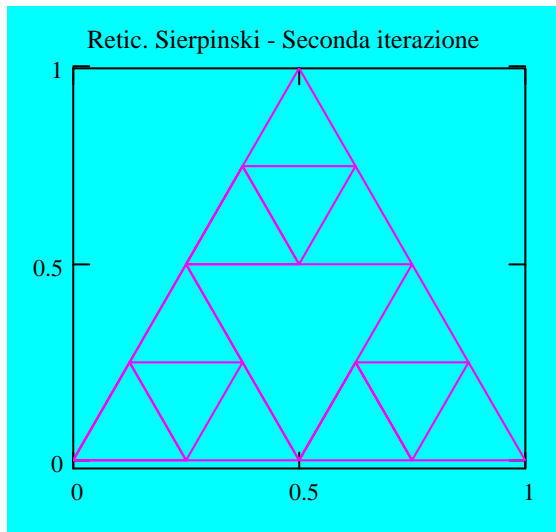


```

{
  n_iter := 2
  V_t := ReticoloSierpinski(n_iter)
}
    
```

$V_t =$

| | 0 | 1 |
|----|-------|------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.125 | 0.25 |
| 2 | 0.25 | 0 |
| 3 | 0 | 0 |
| 4 | 0.125 | 0.25 |
| 5 | 0.25 | 0.5 |
| 6 | 0.375 | 0.25 |
| 7 | 0.125 | 0.25 |
| 8 | 0.25 | 0 |
| 9 | 0.375 | 0.25 |
| 10 | 0.5 | 0 |

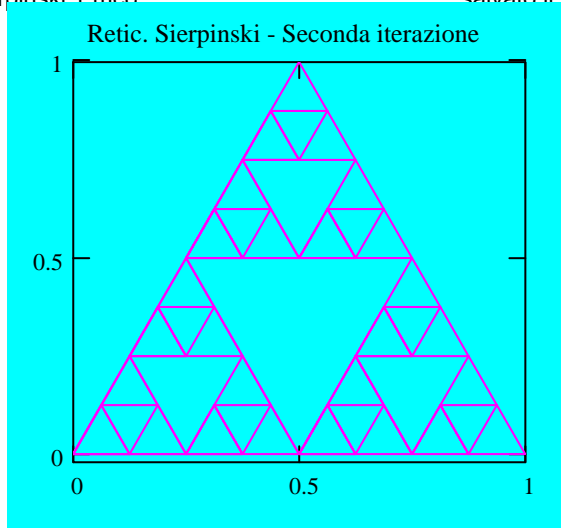


```

{
  n_iter := 3
  V_t := ReticoloSierpinski(n_iter)
}
    
```


$V_t =$

| | 0 | 1 |
|----|--------|-------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.0625 | 0.125 |
| 2 | 0.125 | 0 |
| 3 | 0 | 0 |
| 4 | 0.0625 | 0.125 |
| 5 | 0.125 | 0.25 |
| 6 | 0.1875 | 0.125 |
| 7 | 0.0625 | 0.125 |
| 8 | 0.125 | 0 |
| 9 | 0.1875 | 0.125 |
| 10 | 0.25 | 0 |



Da queste prime iterazioni, si osserva che la superficie del reticolo di Sierpinski diminuisce con al seguente legge

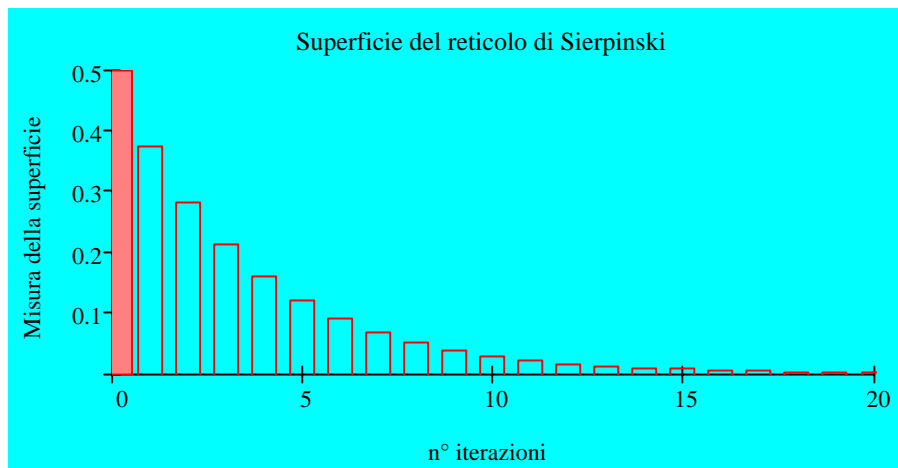
$$\text{Superf}(n_{\text{iter}}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{3^0}{4^1} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \dots \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{n_{\text{iter}}} \frac{3^{n-1}}{4^n} \right)$$

mentre il numero di triangoli aumenta con la seguente legge

$$\text{Num_Triang}(n_{\text{iter}}) = (1, 3, 9, 27, \dots) = (3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots) = 3^{n_{\text{iter}}}$$

La prima relazione converge a zero, come si può osservare dall'operazione al limite e dal grafico seguente.

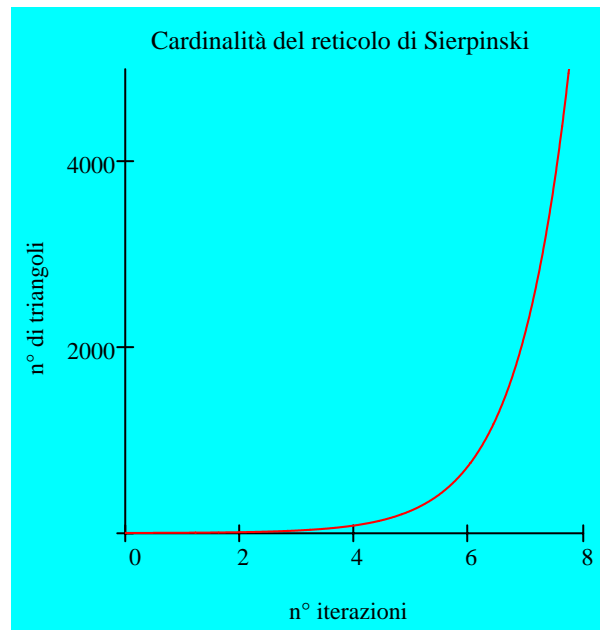
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{3^{i-1}}{4^i} \right) \right] \rightarrow 0 \quad \text{Superf}(n) := \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{3^{i-1}}{4^i} \right)$$



La seconda relazione è una legge di potenza ed essa, all'aumentare del numero d'iterazione diverge, come si può osservare dal limite e dal grafico seguenti

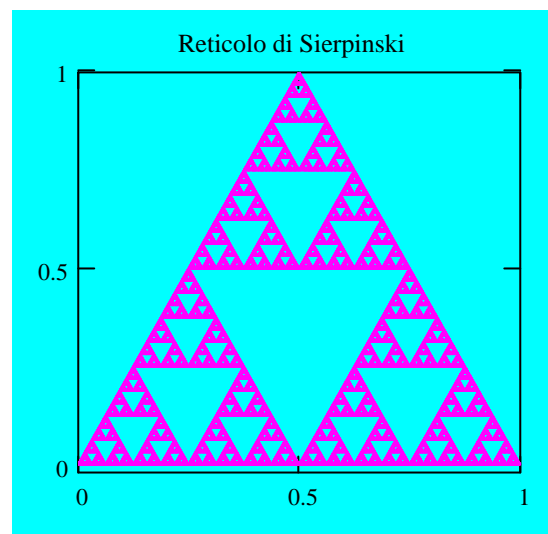
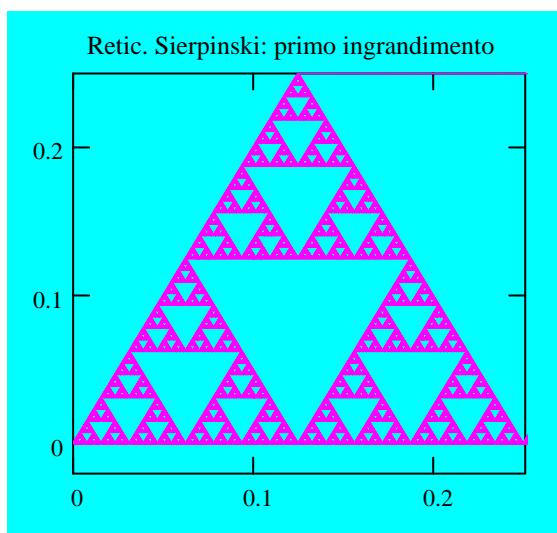
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \rightarrow \infty$$

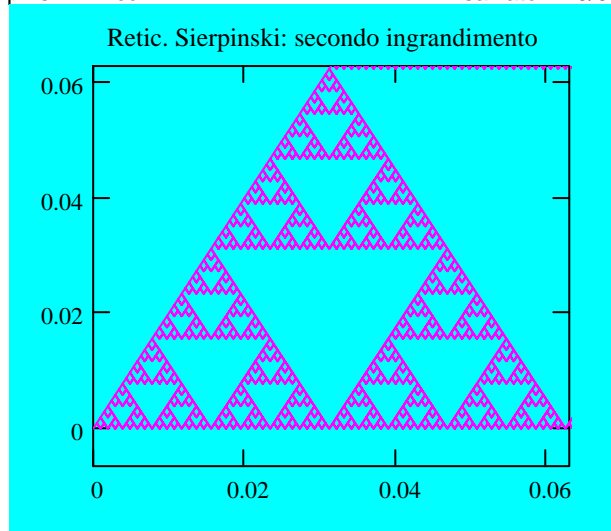
$$\text{Num_Triang}(n) := 3^n$$



Di seguito si ha la rappresentazione del reticolo di Sierpinski per un numero relativamente elevato d'iterazioni; ingrandendo successivamente la porzione di triangoli vicini all'origine si può notare la natura frattale dell'insieme.

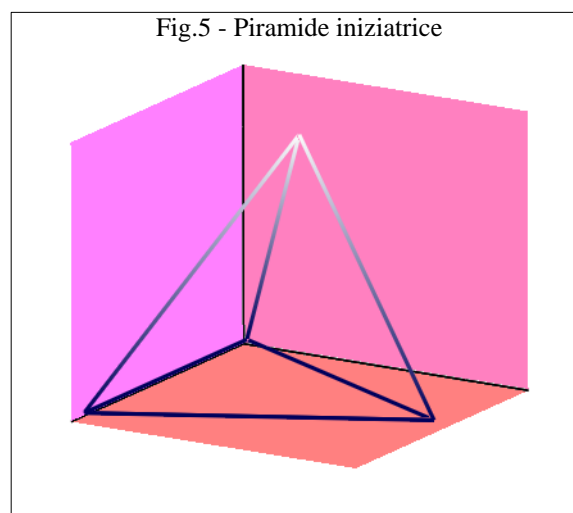
$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 10 \\ V_t := \text{ReticoloSierpinski}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$





3)- Caso tridimensionale: la piramide di Sierpinski

Nel caso tridimensionale la figura iniziatrice può essere composta da una piramide retta a base triangolare isoscele (Fig. 5) (ma non necessariamente, visto che il frattale viene determinato dalla sequenza e dal tipo di trasformazioni) ai cui vertici vengono applicate le trasformazioni (4)



(X, Y, Z)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \\ z_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot z_{\text{old}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{4} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} + \frac{1}{2} \\ z_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot z_{\text{old}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{2} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} \\ z_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot z_{\text{old}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot x_{\text{old}} + \frac{1}{4} \\ y_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot y_{\text{old}} + \frac{1}{4} \\ z_{\text{new}} = \frac{1}{2} \cdot z_{\text{old}} + \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (4)$$

Ecco in dettaglio le quattro trasformazioni:

- La prima trasformazione è una **riduzione di scala 1/2** della piramide iniziatrice; va applicata quattro volte, una per ogni vertice; ciascun vertice è identificato da una terna di coordinate.
-

- La seconda trasformazione è una **riduzione di scala 1/2 con una traslazione sull'asse delle ascisse, di spostamento 1/4, e uno spostamento di 1/2 sull'asse delle ordinate della piramide iniziatrice.**
- La terza trasformazione si compone di una **riduzione di scala 1/2 con una traslazione sull'asse delle ascisse, di spostamento 1/2 sempre riferite alla piramide iniziatrice.**
- La quarta ed ultima trasformazione della piramide iniziatrice si compone di una **riduzione di scala 1/2 con una traslazione sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate, di spostamento 1/4, mentre sull'asse delle quote la traslazione ha uno spostamento di 1/2.**

Per costruire la piramide di Sierpinski utilizzeremo le funzioni $RiduciScala(c_{vecchia}, fatt_{rid})$ e

$Trasla(c_{vecchia}, mis_{spost})$, già definite, all'interno di quattro funzioni che applicheranno le quattro trasformazioni geometriche secondo la sequenza riportata.

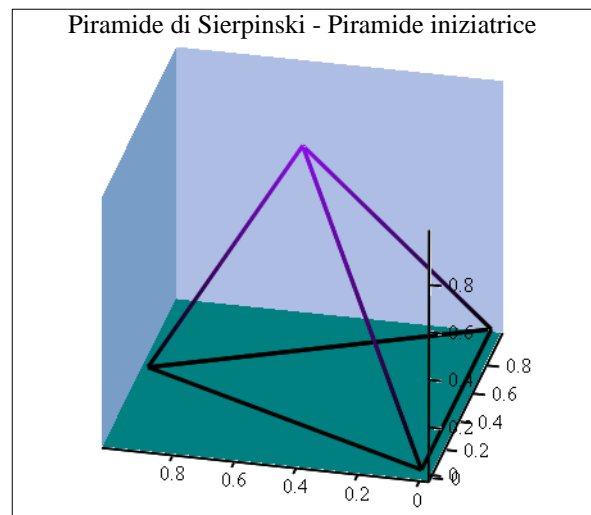
► Implementazione delle funzioni

Come abbiamo fatto per i casi precedenti, proviamo ora a visualizzare la piramide Sierpinski per la seguente sequenza d'iterazioni $\{0; 1; 2; 3\}$:

```

{
  n_iter := 0
  V_p := PiramideSierpinski(n_iter)
}
    
```

$$V_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



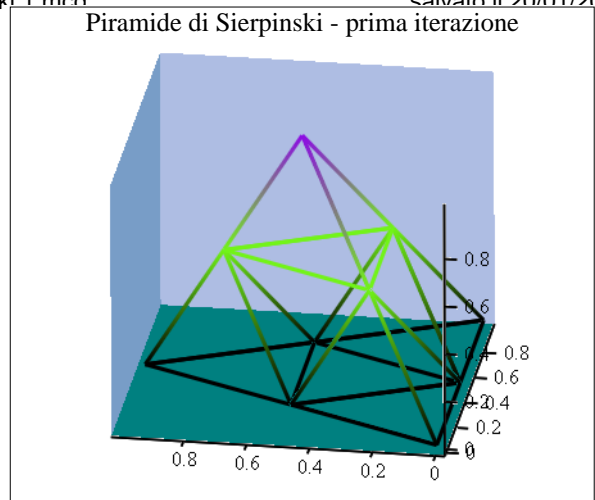
```

{
  n_iter := 1
  V_p := PiramideSierpinski(n_iter)
}
    
```

$$(V_p^{(0)}, V_p^{(1)}, V_p^{(2)})$$

$V_p =$

| | 0 | 1 | 2 |
|----|------|------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.5 | 0 | 0 |
| 2 | 0.25 | 0.5 | 0 |
| 3 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| 4 | 0.5 | 0 | 0 |
| 5 | 0.25 | 0.5 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| 8 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.25 | 0.5 | 0 |
| 10 | 0.75 | 0.5 | 0 |



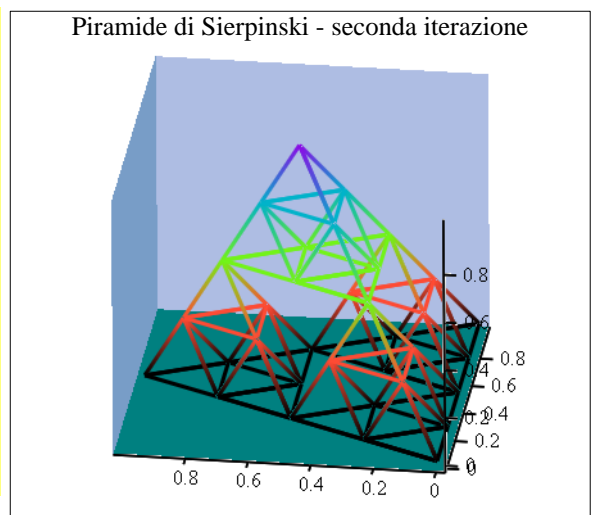
$$(V_p^{(0)}, V_p^{(1)}, V_p^{(2)})$$

```

{
  n_iter := 2
  V_p := PiramideSierpinski(n_iter)
}
    
```

$V_p =$

| | 0 | 1 | 2 |
|----|-------|-------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.25 | 0 | 0 |
| 2 | 0.125 | 0.25 | 0 |
| 3 | 0.125 | 0.125 | 0.25 |
| 4 | 0.25 | 0 | 0 |
| 5 | 0.125 | 0.25 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.125 | 0.125 | 0.25 |
| 8 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.125 | 0.25 | 0 |
| 10 | 0.375 | 0.25 | 0 |

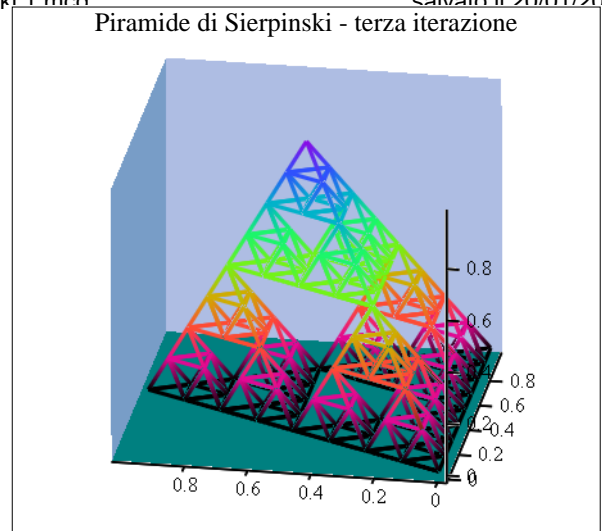


$$(V_p^{(0)}, V_p^{(1)}, V_p^{(2)})$$

```

{
  n_iter := 3
  V_p := PiramideSierpinski(n_iter)
}
    
```

| | | | | |
|---------|--------|--------|--------|-------|
| $V_p =$ | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0.125 | 0 | 0 |
| | 2 | 0.0625 | 0.125 | 0 |
| | 3 | 0.0625 | 0.0625 | 0.125 |
| | 4 | 0.125 | 0 | 0 |
| | 5 | 0.0625 | 0.125 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 |
| | 7 | 0.0625 | 0.0625 | 0.125 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 |
| | 9 | 0.0625 | 0.125 | 0 |
| 10 | 0.1875 | 0.125 | 0 | |



$$(V_p^{(0)}, V_p^{(1)}, V_p^{(2)})$$

Da queste prime iterazioni, si osserva che il volume della piramide di Sierpinski diminuisce con la seguente legge

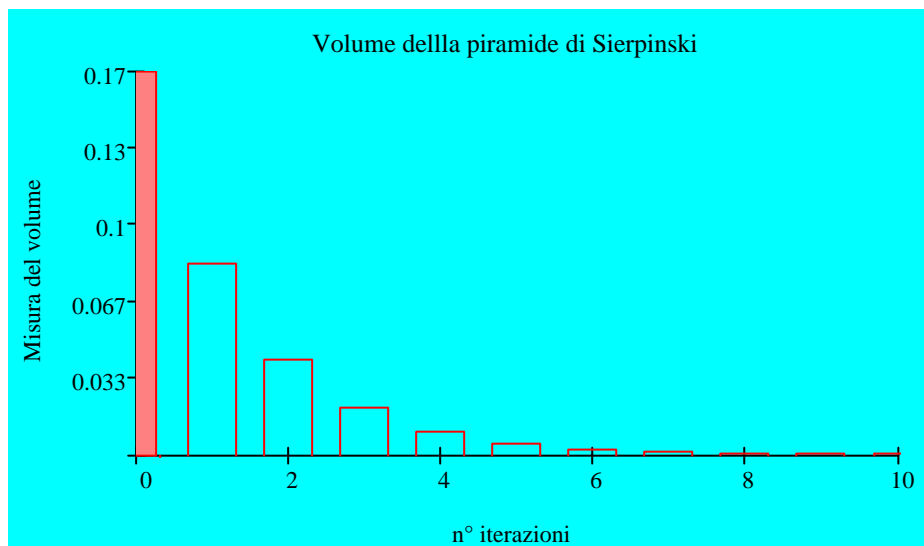
$$\text{Volume}(n_{\text{iter}}) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{6} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \right] = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{n_{\text{iter}}} \frac{1}{2^n} \right)$$

mentre il numero di piramidi aumenta con la seguente legge

$$\text{Num_Piram}(n_{\text{iter}}) = (1, 4, 16, 64, \dots) = (4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \dots) = 4^{n_{\text{iter}}}$$

La prima relazione converge a zero, come si può osservare dall'operazione al limite e dal grafico seguente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \right) \right] \rightarrow 0 \quad \text{Volume}(n) := \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \right)$$



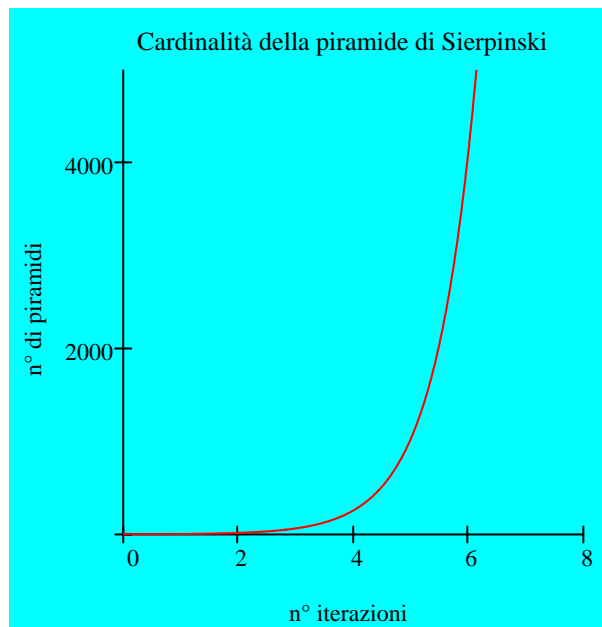
La seconda relazione è una legge di potenza ed essa, all'aumentare del numero d'iterazione diverge, come si può osservare dal limite e dal grafico seguenti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \rightarrow \infty$$

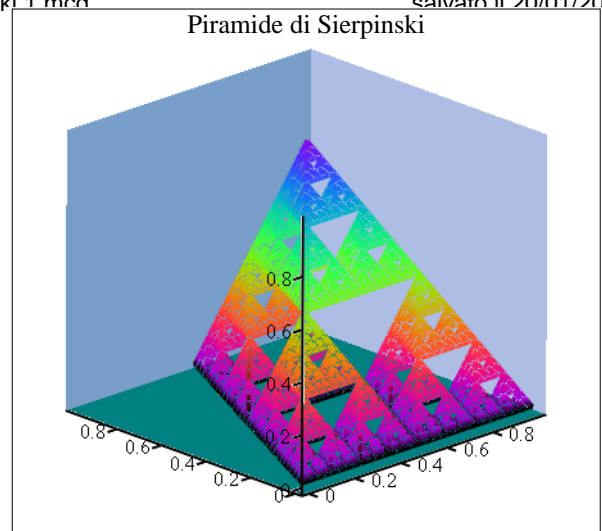
$$\text{Num_Piram}(n) := 4^n$$

Di seguito si ha la rappresentazione della piramide di Sierpinski per un numero relativamente elevato d'iterazioni; anche senza ingrandire successivamente la porzione di piramidi vicine all'origine, si può notare la natura frattale dell'insieme.

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{iter}} := 5 \\ V_p := \text{PiramideSierpinski}(n_{\text{iter}}) \end{array} \right.$$



| | 0 | 1 | 2 |
|----|---------|---------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.03125 | 0 | 0 |
| 2 | 0.01563 | 0.03125 | 0 |
| 3 | 0.01563 | 0.01563 | 0.03125 |
| 4 | 0.03125 | 0 | 0 |
| 5 | 0.01563 | 0.03125 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.01563 | 0.01563 | 0.03125 |
| 8 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0.01563 | 0.03125 | 0 |
| 10 | 0.04688 | 0.03125 | 0 |

 $V_P =$


$$\left(V_P^{(0)}, V_P^{(1)}, V_P^{(2)} \right)$$

4)- Dimensione frattale e densità delle figure di Sierpinski

Osservando i casi discussi in precedenza, possiamo ritrovare delle caratteristiche invarianti di questo tipo di figure; vale a dire caratteristiche invarianti per la sequenza di trasformazioni che vengono applicate iterativamente. Cominciamo con il considerare il numero di riproduzione delle figure iniziatrici:

- nel caso dell'insieme di Cantor abbiamo visto che il numero di elementi che costituisce la figura alla n-esima iterazione è $N = 2^n$
- nel caso del reticolo di Sierpinski, il numero di elementi primi che costituiscono la figura frattale all'n-esima iterazione è $N = 3^n$
- nel caso della piramide di Sierpinski invece, il numero di elementi primi che costituiscono la figura frattale all'n-esima iterazione è $N = 4^n$

possiamo generalizzare questa proprietà affermando che il numero di elementi primi segue una **legge di potenza legata alla dimensione topologica della figura iniziatrice aumentata di uno**. Ora riflettiamo sull'estensione di queste figure frattali, consideriamo cioè l'estensione $L(R)$ misurata con metrica R , che rappresenta l'estensione lineare della figura iniziatrice all'n-esima iterazione, presa come misura unitaria:

- Se prendiamo l'insieme di Cantor, alla n-esima iterazione, la lunghezza della figura è $L(R) = 2^n$, mentre la metrica vale $R = \frac{1}{3^n}$
- Considerando il reticolo di Sierpinski, alla n-esima iterazione, la lunghezza della figura è $L(R) = 3^n$, mentre la metrica vale $R = \frac{1}{4^n}$
- Considerando la piramide di Sierpinski, alla n-esima iterazione, la lunghezza della figura vale $L(R) = 4^n$, mentre la metrica vale $R = \left(\frac{5}{8}\right)^n$

Possiamo definire per questo tipo di figure, una dimensione frattale (detta anche dimensione di Hausdorff-Besicovich), che rappresenta quantitativamente come la figura riempie lo spazio in cui si trova; essa viene definita come

$$d_H = - \left(\frac{\log(L)}{\log(R)} \right)$$

In cui si considera il logaritmo per eliminare gli esponenti che considerano il numero d'iterazioni;
 Applicando questa relazione si ha che la dimensione frattale dell'insieme di Cantor è

$$d_H = \frac{\log(L)}{\log(R)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(2^n)}{\log\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} \Rightarrow d_H = \frac{n \cdot \log(2)}{n \cdot \log\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow d_f = 0.631$$

Il numero è compreso tra la dimensione naturale 0 e la 1, per la precisione risulta più vicina alla dimensione naturale 1. Mentre la dimensione frattale del reticolo di Sierpinski è

$$d_H = \frac{\log(L)}{\log(R)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(3^n)}{\log\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]} \Rightarrow d_H = \frac{n \cdot \log(3)}{n \cdot \log\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow d_H = 0.792$$

Questo numero è compreso tra la dimensione naturale 1 e la 2, più esattamente si trova leggermente spostato verso la dimensione 2 (! da approfondire). Infine considerando la piramide di Sierpinski, la sua dimensione frattale è

$$d_H = \frac{\log(L)}{\log(R)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(4^n)}{\log\left[\left(\frac{5}{8}\right)^n\right]} \Rightarrow d_H = \frac{n \cdot \log(4)}{n \cdot \log\left(\frac{5}{8}\right)} \Rightarrow d_H = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{5}{8}\right)} \Rightarrow d_H = 2.950$$

Questo numero è compreso tra la dimensione naturale 2 e la 3, più esattamente si trova molto vicino alla dimensione 3. La definizione di dimensione frattale deriva proprio dal valore razionale che questi numeri assumono per le figure frattali.

Per le figure frattali è anche possibile parlare di densità; per essa la densità può essere definita come $\rho = \frac{L(R)}{E(R)}$

dove $L(R)$ rappresenta in pratica, il numero di elementi replicanti che costituiscono la figura frattale ed $E(R)$ rappresenta l'estensione della regione ricoperta dalla figura frattale. In base alla definizione di dimensione frattale possiamo esprimere il numero di elementi semplici che costituiscono un frattale in funzione dell'estensione lineare di quest'ultimo

$$d_H = \frac{\ln(L)}{\ln(E)} \Rightarrow -d_H \cdot \ln(E) = \ln(L) \Rightarrow \ln(E^{-d_H}) = \ln(L) \Rightarrow L = E^{-d_H} \Rightarrow L = R^{-d_H}$$

sostituendo nella relazione della densità possiamo esprimere questa solo tramite valori legati alla dimensione lineare della figura frattale

$$\rho = \frac{R^{-d_H}}{E(R)}$$

Nel caso dell'insieme di Cantor, solo una dimensione viene ricoperta dalla figura, perciò si ha $E(R) = R^1$; di

conseguenza la sua densità sarà

$$\rho = \frac{R^{-d_H}}{R^1} \Rightarrow \rho = R^{-(d_H+1)} \Rightarrow \rho = R^{-(0.631+1)} \Rightarrow \rho = R^{-1.369}$$

Nel caso del reticolo di Sierpinski, sono due le dimensioni che vengono ricoperte, perciò l'estensione si esprime come $E(R) = R^2$; la sua densità si esprime con

$$\rho = \frac{R^{-d_H}}{R^2} \Rightarrow \rho = R^{-(d_H+2)} \Rightarrow \rho = R^{-(0.792+2)} \Rightarrow \rho = R^{-2.792}$$

E per ultimo consideriamo la piramide di Sierpinski, l'estensione di questo frattale è $E(R) = R^3$; la sua densità viene espressa come

$$\rho = \frac{R^{-d_H}}{R^3} \Rightarrow \rho = R^{-(d_H+3)} \Rightarrow \rho = R^{-(2.950+3)} \Rightarrow \rho = R^{-5.950}$$

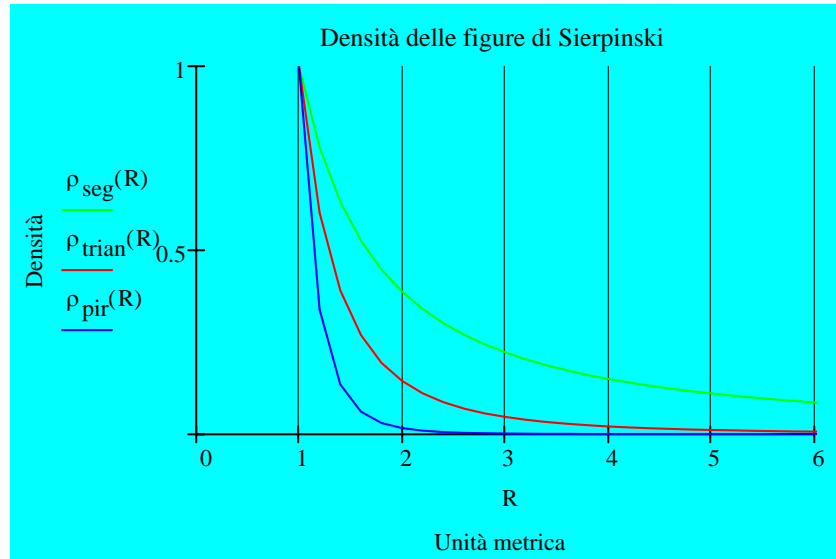
Possiamo ora riportare le relazioni per la densità di queste figure su un grafico

$$R := 1, 1.2 .. 80$$

$$\rho_{\text{seg}}(R) := R^{-1.369}$$

$$\rho_{\text{trian}}(R) := R^{-2.792}$$

$$\rho_{\text{pir}}(R) := R^{-5.950}$$



Dal grafico precedente si osserva che la densità delle figure frattali tende a diminuire con il crescere della dimensione lineare caratteristica; in altre parole si può concludere che le figure frattali sono asintoticamente vuote.