15 OTTOBRE 2008

Proposta di una feconda definizione di prodotto

(a cura di Gaspero Domenichini)

<u>**Oggetto**</u>: **documento, da inoltrare all'UMI (Unione Matematica Italiana), inerente a: proposta di definizione di "prodotto di n fattori (reali), con n naturale"** (quindi anche con n=1 e con n=0)**;** **proposta di altre importanti definizioni "corollario"**.

Per facilitare il confronto, numero i vari capoversi.

Introduzione

1 – Sono Gaspero Domenichini, un insegnante di Matematica e Fisica. Vorrei proporre alla vostra attenzione alcune definizioni che sono particolarmente sintetiche, generali, di grande applicazione e utili per intuire meglio diversi concetti.

2 – Non so se siano note, se siano già state date o se siano originali, ma mi pare che meritino di diventare "patrimonio comune".

3 – Per prima do la definizione principale, da cui discendono praticamente tutte le altre ed è LA definizione che propongo, cioè quella di "prodotto di n numeri reali, con n naturale".

4 – La do prima come prodotto, ma successivamente generalizzo il concetto applicandolo ad una generica operazione (binaria) di un monoide ripetuta n volte, con n naturale.

5 – Ne faccio anche un altro esempio, definendo anche la somma ripetuta n volte.

6 – Faccio notare che definisco il prodotto di n numeri con n naturale, cioè anche con n=1 e n=0, e in questo sta l'originalità della definizione.

7 – Avendo dato questa definizione, si possono definire, in modo davvero sintetico, molti altri concetti, come quello di potenza naturale e di fattoriale di un numero.

8 – Provo anche a motivare adeguatamente le mie affermazioni, a volte con logica stringente, altre con affermazioni da "metamatematico" che, mi rendo conto, possono apparire da "fanatico", ma credo che bastino anche solo poche delle prime per essere convincenti.

9 – Chiedo comunque, per favore, in caso non riteniate sufficientemente convincente quanto ho scritto, di farmi presente almeno alcuni degli errori o delle inesattezze in cui sono eventualmente incorso.

10 – Potete contattarmi tramite Ivana Niccolai (vostra associata), o direttamente tramite la mia e-mail che è gasperod@gmail.com , o tramite il forum di BASE Cinque, nella filiera dove è nato questo lavoro: Prodotto di n fattori, con n naturale .
Vi ringrazio anticipatamente.

15 OTTOBRE 2008

11 – **Definizione di “prodotto di n numeri reali, con n naturale”** (nei successivi punti 12, 13 e 14 la presento con tre linguaggi diversi) – in questo lavoro, per praticità, lo chiamo anche “prodotto esteso” (intendendo che ho esteso il significato anche al prodotto di un solo fattore e di zero fattori) :

12 – Data una n-pla $(a_i)_{1 \le i \le n}$ di numeri reali (non necessariamente diversi), che considero “fattori”, il prodotto esteso di (a_i) è il valore che si ottiene moltiplicando 1 per tutti gli a_i .

13 – Definendolo per ricorrenza:

data una n-pla $(a_i)_{1 \le i \le n}$ di numeri reali, sia $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_i = b_{i-1} \cdot a_i \quad \text{con} \quad 1 \le i \le n \end{cases}$,

allora il prodotto esteso degli (a_i) è b_n .

14 – E con un’altra simbologia (meno precisa, ma più intuitiva): data una n-pla $(a_i)_{1 \le i \le n}$ di numeri reali, il loro prodotto è $1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

15 – Indico tale “prodotto esteso” con l'espressione $\prod_{i=1}^{n} a_i$.

16 – Ho ben presente che, nella letteratura matematica, tale simbologia è già usata con un significato (“leggermente”) diverso, cioè in un ambito più ristretto, ma sono persuaso che tutte le formule che prima avevano validità “generale” (cioè che erano vere in tutti i casi in cui la simbologia aveva significato) resteranno valide anche nei casi “estesi” (cioè n=1 e n=0), questo se le formule hanno significato e salvo casi “particolari” (praticamente “costruiti ad hoc”) di interesse decisamente secondario.

17 – Anzi, poiché anche questo potrebbe essere un indizio significativo a favore della definizione di “prodotto esteso”, chiedo a chiunque trovi delle formule, che non verificano il punto 16, di notificarmelo.

18 – È ovvio che “il prodotto di due numeri reali” coincide con il prodotto binario “classico”, che “il prodotto di più numeri reali” coincide con il prodotto di più numeri “classico”, che “il prodotto di un solo fattore” è il fattore stesso (considerato come prodotto) e che il prodotto di zero fattori è l’elemento neutro 1.

19 – Analogamente al caso del prodotto, do la più generale **definizione di “operazione ripetuta di n elementi, con n naturale”**: Dato un monoide $(A, *)$ con elemento neutro “e” e una n-pla $(a_i)_{1 \le i \le n}$ $a_i \in A$ (non necessariamente diversi) che considero “operandi”, l'operazione ripetuta di (a_i) è il valore che si ottiene operando l'elemento neutro e con tutti gli a_i , nell'ordine.

Indico tale “operazione estesa” con l'espressione $\prod_{i=1}^{n} a_i = e \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

20 – Anche in questo caso, analogamente al caso particolare del prodotto, si ha che un’operazione ripetuta su due elementi coincide con l’operazione binaria “classica”, che un’operazione ripetuta su più elementi coincide con l’operazione su più elementi “classica”, che con un’operazione ripetuta con un solo elemento si ottiene l’elemento stesso e con zero elementi si ottiene l’elemento neutro.

21 – Come esempio di tale definizione, definisco la “**somma di n numeri reali, con n naturale**”, che, in questo lavoro, chiamo anche “somma estesa”:

22 - Data una n-pla $(a_i)_{1 \le i \le n}$ di numeri reali (non necessariamente diversi) che considero “addendi”, la somma estesa di (a_i) è il valore che si ottiene sommando 0 a tutti gli a_i ; indico tale “somma estesa” con l'espressione $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Si intende che valgono le stesse considerazioni riportate al punto 16.

23 – Avendo accettato questa definizione (quella del punto 19), si possono dare **altre definizioni,** in maniera davvero sintetica, senza necessità di definire casi particolari, di fare casistiche, o di introdurre concetti “ad hoc”:

24 – **Fattoriale**: n! È il prodotto dei primi n numeri naturali positivi.

25 – **Potenza**: a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a .

26 – **Massimo Comun Divisore** (definizione “operativa”): Il MCD di un insieme finito di numeri naturali è il prodotto delle massime potenze di numeri primi che sono loro divisori comuni.

27 – **Monomio**: Se A è un anello e X è un insieme di incognite, un monomio nelle incognite di X e a coefficienti in A è il prodotto formale di fattori di $A \cup X$.

28 – **Polinomio**: un polinomio è la somma formale di monomi.

29 – **Prodotto** (se è noto il concetto di somma ripetuta, ma non quello di prodotto, che viene reinterpretato): il prodotto $a \cdot n$ $n \in \mathbb{N}$ è la somma di n addendi uguali ad a .

30 – **Osservazioni importanti**:

31 – Accogliere la definizione di “prodotto esteso” evita di definire singolarmente i casi per n=2, n>2, n=1, n=0, perché, in tutti i casi visti sopra, il concetto principale delle definizioni è effettivamente uno solo (praticamente è uno solo anche per tutte le definizioni). Questa sintesi per qualcuno può essere una prova che la definizione è vera, ma per tutti dovrebbe essere almeno un indizio che non ho “inventato una definizione” e che il concetto è stato “scoperto”.

32 – Con la definizione per il fattoriale, il caso 0! = 1 risulta naturale, senza bisogno di alcun commento. E devo dire che, invece, non ho MAI TROVATO alcun' altra spiegazione che fosse almeno un po’ “convincente”.

33 – Se vogliamo che anche “0” e “1” siano monomi e polinomi e che ogni monomio sia anche un polinomio (cosa indispensabile se desideriamo che l’insieme dei monomi e quello dei polinomi siano chiusi e siano gruppi), la definizione data è decisamente più semplice di quella “classica” e

di qualunque altra che non faccia uso del concetto di “prodotto esteso”.

34 – Riguardo alla somma, in genere si dice che «la somma di zero addendi è 0, perché è ovvio che, se non c’è niente, il risultato debba essere 0». Però poi non si capisce perché 3^0 (il prodotto di zero fattori uguali a 3) sia 1 e non 0, dal momento che «il prodotto di zero fattori dovrebbe essere 0, perché è ovvio che, se non c’è niente, il risultato debba essere 0».
Invece con con le definizioni di “somma estesa” e di “prodotto esteso” l’interpretazione corretta è naturale e semplicissima: la somma di zero addendi è l’elemento neutro della somma (cioè 0), il prodotto di zero fattori è l’elemento neutro del prodotto (cioè 1).

35 – Osserviamo la definizione di MCD data sopra: forse non vi si riconosce l'utilità della definizione di “prodotto esteso”. Ma se il termine “prodotto” indicasse il prodotto classico, allora, nel caso in cui i numeri fossero primi fra loro, non avremmo il MCD, per cui la definizione andrebbe cambiata in qualcosa del tipo: “Il MCD di un insieme finito di numeri naturali è (se esiste) il prodotto delle massime potenze di numeri primi che sono loro divisori comuni, se c'è una sola massima potenza è la potenza stessa, se non ci sono divisori comuni primi è il numero 1”. Lo stesso vale per qualunque altra definizione di MCD. Molte volte interiorizziamo dei concetti, come se fossero “naturali”, e una definizione che li preveda implicitamente sembrerebbe la “manna dal cielo”, però poi, quando si trova e si deve decidere se accettarla o meno, ci si accorge che le cose non sono così facili.

36 – Anche nella definizione di potenza tutto diventa semplice e intuitivo, senza tutta la casistica e le definizioni “ad hoc” che caratterizzano le definizioni ufficiali: provate a confrontare la definizione di “prodotto esteso” con qualunque altra ... (ma “provate” per davvero!)

37 – E il prodotto esteso chiarisce inequivocabilmente che $0^0=1$, quindi che è sicuramente definito.

38 – Ecco: questo per molti è, credo, il nocciolo della questione.

39 – Ho ragioni per credere che, se si riesce ad accettare che $0^0=1$, non si avranno difficoltà ad accettare anche la definizione di “prodotto esteso” (cioè di “prodotto di un solo fattore” e “prodotto di zero fattori”), mentre tale definizione è incompatibile con l’idea che 0^0 non è definibile .

40 – Faccio comunque osservare che è la definizione di $0^0=1$ che discende da quella di “prodotto esteso”, e non il viceversa.

41 – Credo che la posizione ufficiale dell’UMI sia proprio che l’espressione 0° non ha significato, quindi provo a motivare, in varie maniere, perché io la ritengo una posizione priva di fondamento, ma lo faccio in un altro documento dedicato solo a questo argomento: “ $0^0=1$, inequivocabilmente ”.

42 – Qui aggiungo soltanto che io non mi posso accontentare di parole quali “la posizione ufficiale è questa”, ma ho bisogno di motivazioni logiche (e non solo).

43 – Il perché mi pare evidente, ma lo esplicito dicendo che, se mi accontentassi di questo, dovrei abbandonare ciò che per me è la Matematica, ciò in cui credo e a cui tento spesso di educare gli alunni che mi sono affidati.

44 – Infatti ai miei alunni presento la Matematica anche con “parabole” tipo quelle che seguono:

45 – Se vi insegnano che Napoleone è morto avvelenato e se voi aveste dubbi in proposito, non avreste molti modi per cercare la verità, se non nella fiducia in chi racconta il fatto; e, se voleste fare una ricerca vostra, probabilmente il massimo che potreste trovare sarebbero dei documenti scritti, di cui dovreste fidarvi.

46 – La matematica è diversa: alle superiori potete richiedere la motivazione logica di OGNI cosa che vi viene insegnata e, finché non vi ha convinto (se lo fate presente), siete autorizzati a non considerarla vera.

47 – Inoltre potete fare indagini da soli, con le vostre capacità logiche (e non solo), sapendo che di per sé “possono bastare”.

48 – Tutto questo perché, in Matematica, un’affermazione motivata non importa se è di colui che si considera “meno qualificato” o è dell’insegnante, perché conta la motivazione in sé, non chi la fa.

49 - La Matematica non è “democratica”, nel senso che se tutta (o quasi tutta) la classe dice che (in $\mathbb{N}$) “3+3=5” e nessuno (o solo una persona) dice che 3+3=6, l’affermazione corretta è, comunque, la seconda.

50 - Non dovete andare “dietro alla corrente”, ma dovete essere sempre voi stessi; i giovani sono spesso “brutti” perché vanno dietro alle mode, cioè vogliono apparire come non sono, e quindi non sono nulla: siate quello che siete, ricercatelo e siatene orgogliosi ... e sarete bellissimi!

51 - (Questo non lo do mai per “ufficialmente vero”, ma come una mia idea, una mia scoperta.) Come la Fisica è “il corpo” della natura, così la Matematica ne è “l’anima”. E se così è, allora la Matematica non è il risultato di una convenzione, ma è una Realtà dell’Universo.

52 – Non so che cosa voi pensiate di queste affermazioni “da fanatico”, ma questa è la matematica che conosco io, ed è inconciliabile con il dover accettare per vera una definizione che, con tutto il mio intuito e con tutto me stesso, vedo assurda, oppure con il dover dire che è falsa una definizione che (a mio parere) è “oggettivamente bella”.

Ringrazio per la disponibilità.

Lucca, 15 ottobre 2008 Gaspero Domenichini