ESERCIZI RISOLTI SU CALCOLO DI LIMITI DI FUNZIONI MEDIANTE LIMITI NOTEVOLI

Si farà riferimento ai seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k \quad (k\in\mathbb{R})$$

Gli esercizi sotto risolti non sono (volutamente) in ordine crescente di difficoltà.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt[3]{x}}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} = 1\cdot\frac{1}{0^+} = +\infty$

2) $\lim_{x\to \pi/2}\ \frac{cosx}{\pi-2x} = \frac{0}{0}$ poniamo $x-\frac{\pi}{2} = t$, da cui $x = t+\frac{\pi}{2}$ e $t\to 0$ nel limite dato; pertanto siamo ricondotti a calcolare

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi-2t-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{-sint}{-2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{sint}{t} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{6x} = 1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^3 = e^3$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{sin4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{4x}\ \frac{4x}{sin4x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}\ \frac{1}{\frac{sin4x}{4x}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{8}$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sin2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{2sinxcosx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinx}\frac{1}{2cosx} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5') $\lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinkx}\ (con\ k\neq 0) = \frac{0}{0}$ Tale limite generalizza il precedente e sarà calcolato non utilizzando la formula di duplicazione del seno per riprodurre la situazione di un limite notevole, ma con trasformazioni più generali (anche se un po' più laboriose); si può scriverlo infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinx}\ \frac{sinx}{sinkx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinx}\ \frac{sinx}{x}\ \frac{x}{sinkx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinx}\ \frac{sinx}{x}\ \frac{kx}{sinkx}\frac{1}{k} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{sinx}-1}{sinx}\ \frac{sinx}{x}\ \frac{1}{\frac{sinkx}{kx}}\ \frac{1}{k} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-cosx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\ \frac{x}{1-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\ \frac{x^2}{1-cosx}\frac{1}{x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\ \frac{1}{\frac{1-cosx}{x^2}}\frac{1}{x}=\ 1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\ \infty=\infty$$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1)}\ \frac{1}{-(x+1)}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$$=-\frac{1}{2}$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e+x)-1}{tgx}=\frac{0}{0}=\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e+x)-\ln e}{\frac{sinx}{cosx}}=\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{sinx}{cosx}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}}\frac{x}{sinx}\frac{cosx}{e}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\ln 5}\right)^{2x}-1}{x}=\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{(2\ln 5)x}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}2\ln 5\ \frac{e^{(2\ln 5)x}-1}{(2\ln 5)x}=2ln5$$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-e^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\ \frac{e^x-1}{x}-\ \frac{e^{-x}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\ \frac{e^{-x}-1}{-x}=1+1=2$$

11) $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{1-x}=\frac{0}{0}$ poniamo x -1 = t , da cui x = t + 1 e t→0 nel limite dato; siamo pertanto ricondotti a calcolare

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t\cdot e-e}{-t}=\lim_{t\to 0}-e\frac{e^t-1}{t}=-e$$

12) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$ Poniamo $\frac{1}{2x}=t$, da cui $x=\frac{2}{t}$, t→∞ nel limite dato; siamo pertanto ricondotti a calcolare

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=e^2$$

13) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2x}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}} = e^2$$

14) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{16+x}-2}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{16\left(1+\frac{x}{16}\right)}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+\frac{x}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-2}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{\left(1+\frac{x}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{x}{16}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(cosx)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(cosx-1)]}{cosx-1}\cdot\frac{cosx-1}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(cosx-1)]}{cosx-1}\cdot\left(-\frac{1-cosx}{x^2}\right) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Prof. Francesco Camia

Docente di Matematica e Fisica

presso i Licei “Colombini” di Piacenza