EQUAZIONI ALGEBRICHE DI 3° E 4° GRADO.

Appunti a cura del prof. Nicola SANTORO.

Qui di seguito viene esposta, in forma abbastanza semplice (particolarmente indicata per gli studenti del triennio[1] *delle scuole medie superiori), la teoria per la soluzione di un'equazione algebrica di 3° e di 4° grado, cosiddetta per radicali.*

Definizioni di base e relazioni tra coefficienti e radici di una equazione algebrica.

Chiameremo *equazione algebrica di grado n nell'incognita z*, l'equazione che si ottiene eguagliando a zero una funzione razionale intera *f(z)* di grado *n* nella variabile *z*:

(1) $$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0 .$$

Un numero z_0, reale o complesso, che sia uno zero per *f(z)*, si chiama *radice dell'equazione* (1). Sappiamo dall'algebra che, un'equazione algebrica di grado *n*, nel campo complesso, ammette *n* e non più di *n* radici (distinte o no).

Indichiamo con z_1, z_2, z_3,…, z_n le *n* radici distinte o no, dell'equazione algebrica (1). Facciamo le seguenti posizioni:

$$s_1 = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n ,$$
$$s_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + ... + z_1 z_n + z_2 z_3 + z_2 z_4 + ... + z_2 z_n + ... + z_{n-1} z_n ,$$
$$s_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + ... + z_1 z_2 z_n + z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_5 + ... + z_2 z_3 z_n + ... + z_{n-2} z_{n-1} z_n ,$$
…………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………..
$$s_n = z_1 z_2 z_3 ... z_n \quad ,$$

cioè indichiamo, in generale, con s_p la somma dei prodotti a *p* a *p* delle radici z_1, z_2, z_3,…, z_n.

Si riconosce facilmente che vale l'identità:

(2) $$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)...(z - z_n) = z^n - s_1 z^{n-1} + s_2 z^{n-2} - s_3 z^{n-3} + ... + (-1)^n s_n .$$

Ma, essendo dall'algebra elementare:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)...(z - z_n) ,$$

in forza della (2) si ha:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = a_0 z^n - a_0 s_1 z^{n-1} + a_0 s_2 z^{n-2} - a_0 s_3 z^{n-3} + ... + (-1)^n a_0 s_n .$$

Quindi, per il principio di identità dei polinomi, deve essere:

$$a_1 = -a_0 s_1 ;\;\; a_2 = a_0 s_2 ;\;\; a_3 = -a_0 s_3 ;...;\;\; a_n = (-1)^n a_0 s_n ,$$

[1] Si richiede una buona conoscenza della teoria dei numeri complessi.

da cui si ricavano le formule:

(3) $$s_1 = -\frac{a_1}{a_0};\ \ s_2 = \frac{a_2}{a_0};\ \ s_3 = -\frac{a_3}{a_0};\ldots;\ \ s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}\ .$$

Le (3) ci dicono che:

In una equazione algebrica di grado n, la somma dei prodotti delle radici a k a k è uguale al quoziente ottenuto dividendo il coefficiente di z^{n-k} *, moltiplicato per* $(-1)^k$ *, per il coefficiente* a_0 *di* z^n .

In particolare, *la somma delle radici è uguale al coefficiente di* z^{n-1}*, cambiato di segno, diviso per il primo coefficiente, e il prodotto delle radici è uguale al termine noto, moltiplicato per* $(-1)^n$ *, diviso per il primo coefficiente.*

Per l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ si ha $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$; risultato già noto dall'algebra elementare. Il teorema dimostrato ci permette di risolvere il seguente problema:

«*Trovare n numeri conoscendone la somma* σ_1*, la somma dei loro prodotti a due a due* σ_2*, la somma dei loro prodotti a tre a tre* σ_3*,…, il loro prodotto* σ_n ».

Infatti, gli *n* numeri cercati non sono altro che le radici dell'equazione:

$$z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \sigma_3 z^{n-3} + \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0\ .$$

Soluzione delle equazioni di 3° e 4° grado.

È noto che per le equazioni di 1° e 2° grado si può dare una formula risolutiva. Mostreremo che la stessa cosa si può fare per le equazioni di 3° e 4° grado. Come già anticipato nella introduzione, queste formule risolutive esprimono le radici in funzione dei coefficienti dell'equazione, per mezzo di operazioni razionali e di estrazioni di radici.

A titolo di notizia, diciamo che la cosa non è più possibile, almeno in generale, per le equazioni di grado superiore al quarto, nel senso che per una equazione generale di grado ≥ 5 , le radici non si possono esprimere per mezzo dei coefficienti con sole operazioni razionali ed estrazioni di radici (teorema di Ruffini-Abel).

Osserviamo anzitutto che, se nella equazione di terzo grado:

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0\ ,$$

poniamo:

(4) $$z = x - \frac{a_1}{3a_0}\ ,$$

si ottiene:

$$a_0\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^3+a_1\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^2+a_2\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)+a_3=0\ .$$

Eseguendo le operazioni indicate e semplificando si ha l'equazione:

(5) $$x^3+px+q=0\ ,$$

con $$p=\frac{3a_0a_2-a_1^2}{3a_0^2}\ ,\qquad q=\frac{2a_1^3+27a_0^2a_3-9a_0a_1a_2}{27a_0^3}\ .$$

Si vede così che mediante la posizione (4) ogni equazione di 3° grado può ridursi alla *forma ridotta* (5), ove il primo coefficiente vale 1 e manca il termine contenente l'incognita al quadrato. Basterà perciò limitare il nostro studio alla equazione ridotta (5).

Per risolvere l'equazione (5), poniamo:

(6) $$x=u+v\ ,$$

con u e v nuove incognite. Otteniamo:

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0\ .$$

Questa equazione sarà soddisfatta dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases}3uv+p=0\\ u^3+v^3+q=0\end{cases},$$

ossia:

(7) $$\begin{cases}uv=-\dfrac{p}{3}\\ u^3+v^3=-q\end{cases}.$$

Elevando al cubo la prima equazione del sistema (7) si ottiene[2]:

(8) $$\begin{cases}u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}\\ u^3+v^3=-q\end{cases},$$

e si vede così che dei due numeri u^3, v^3 conosciamo la somma, che è $-q$, e il prodotto che è $-\dfrac{p^3}{27}$. Pertanto, come è noto dall'algebra elementare, i due numeri in questione sono le radici dell'equazione di 2° grado:

[2] E con ciò il sistema (8) oltre alle soluzioni del sistema (7) avrà anche altre soluzioni.

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \ ,$$

che risolta dà:

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ .$$

Si potrà quindi assumere:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ , \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ .$$

Tenuto conto della (6), si ha, per l'equazione (5), la seguente formula risolutiva, detta *formula di Cardano*:

(9) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

Nel campo complesso ognuno dei radicali cubici ha tre valori e sembrerebbe quindi che dalla (9) si potessero ottenere 9 radici per l'equazione (5). È facile però vedere che dei 9 valori che si ottengono soltanto tre soddisfano l'equazione (5)[3].

Infatti, osserviamo anzitutto che i valori di u e v che si ricavano dalle formule:

(10) $$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ , \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ ,$$

devono soddisfare al sistema (7), e in particolare alla prima equazione del sistema.

Se indichiamo con u_0 uno qualunque dei tre valori che si ricavano dalla prima delle (10), a u_0 dobbiamo associare quel particolare valore v_0, dato dalla seconda delle (10), per il quale risulta:

$$u_0 v_0 = -\frac{p}{3} \ .$$

Premesso ciò, essendo ε, ε^2 le radici cubiche complesse dell'unità[4], si può provare facilmente (in base ad una ben nota formula sulla radice n-esima di un numero complesso[5]), che i tre valori dati dalla prima delle (10) sono:

$$u_0 , \ u_0\varepsilon , \ u_0\varepsilon^2 \ ,$$

e i tre valori dati dalla seconda delle (10) sono:

---

[3] Si tenga presente la nota (2).

[4] Si ha: $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

[5] È la formula (trigonometrica) che si deduce dalla ben nota relazione di De Moivre.

$$v_0\,,\ \ v_0\varepsilon\,,\ \ v_0\varepsilon^2\ \ .$$

Ora è facile riconoscere che soltanto le tre coppie di numeri:

$$(u_0,v_0)\,,\ \ (u_0\varepsilon,v_0\varepsilon)\,,\ \ (u_0\varepsilon^2,v_0\varepsilon^2)\quad ,$$

soddisfano alla prima equazione del sistema (7)[6].

Quindi le tre radici dell'equazione (5) sono:

$$x_1=u_0+v_0\,,\quad x_2=u_0\varepsilon+v_0\varepsilon^2\,,\quad x_3=u_0\varepsilon^2+v_0\varepsilon\quad .$$

Si noti che nella (9) compare l'espressione:

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\quad . \tag{12}$$

Se risulta $\Delta=0$, i due radicali della (9) coincidono e si può assumere $v_0=u_0$. Allora le (11) diventano:

$$x_1=2u_0\,,\quad x_2=x_3=u_0(\varepsilon+\varepsilon^2)=u_0\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=-u_0\quad ,$$

e si ha una radice doppia. Si avrà una radice tripla $x_1=x_2=x_3=0$, se $u_0=0$, ossia se nella (5) è $p=q=0$.

Si lascia allo studente la discussione della (9) quando p e q *sono reali*.

Si trova facilmente che se $\Delta>0$, la (5) ha una radice reale e due complesse coniugate; se $\Delta=0$ ha una radice reale doppia ed una reale semplice (a meno che sia $p=q=0$ nel qual caso si ha lo zero come radice tripla); se $\Delta<0$ si hanno tre radici reali semplici.

Occupiamoci, adesso, della soluzione dell'equazione di 4°grado. L'equazione di 4° grado nell'incognita z ha la forma:

$$a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0\quad ,$$

che mediante la posizione:

$$z=x-\frac{a_1}{4a_0}\quad ,$$

si trasforma, come si riconosce facilmente, nella seguente:

---

[6] Basta infatti osservare che è $u_0v_0=-\dfrac{p}{3}$ e $\varepsilon^3=1$.

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad , \tag{13}$$

dove p, q, r, possono calcolarsi in maniera analoga a quanto fatto per l'equazione di 3° grado, eseguendo le operazioni e semplificando, e comunque sono vincolati ai coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 da relazioni che qui non importa precisare.

Per risolvere la (13), posto:

$$x = u + v + w \quad , \tag{14}$$

e facendone il quadrato, si ricava:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw) \quad ;$$

quadrando ancora:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w) \quad ,$$

ossia per la (14):

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvwx + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0 \quad .$$

Quest'ultima equazione coincide con la (13), se i numeri u, v, w sono scelti in modo che risulti:

$$\begin{cases} -2(u^2 + v^2 + w^2) = p \\ -8uvw = q \\ (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = r \end{cases} \quad ,$$

ossia:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2 - 4r}{16} \\ uvw = -\dfrac{q}{8} \end{cases} \quad . \tag{15}$$

Elevando al quadrato la terza equazione del sistema (15), si ottiene:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2 - 4r}{16} \\ u^2v^2w^2 = \dfrac{q^2}{64} \end{cases} \quad . \tag{16}$$

Ricordando ora le relazioni che passano tra le radici di una equazione algebrica e i coefficienti (v. paragrafo precedente), segue che i numeri u^2, v^2, w^2, soddisfacenti al sistema (16), sono le radici della seguente equazione di 3° grado:

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}t - \frac{q^2}{64} = 0 \quad .$$

Dette t_1, t_2, t_3 le radici di questa equazione, si potrà assumere: $u^2 = t_1$, $v^2 = t_2$, $w^2 = t_3$, onde per la (14) si conclude che le radici della (13) sono date da:

$$x = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \quad .$$

Ogni radicale ha due valori, ma non vengono 8 radici, perché una volta fissati i valori u, v dei primi due radicali, resta determinato il valore w del terzo radicale dalla terza equazione del sistema (15).

BIBLIOGRAFIA

G. ZWIRNER *Lezioni di Analisi Matematica*, CEDAM, Padova, 1976;

A. G. KUROŠ *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977.