PROBLEMI E QUESITI DI TERMOLOGIA (SOLUZIONI)

Qui di seguito viene riportata la risoluzione dei problemi presentati nel file Unità omonimo (enunciati). Si raccomanda di prestare molta attenzione ai ragionamenti ed ai calcoli svolti.

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

1) Dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT = \frac{m}{M} RT$, essendo noti p, V, T, M si potranno ricavare:

il numero di moli $n = \frac{pV}{RT} = \frac{10^7 \cdot N \cdot m^{-2} \cdot 0,02 \cdot m^3}{8,31 \cdot J \cdot mol^{-1} \cdot °K^{-1} \cdot (17 + 273,15) \cdot °K} = 83 \cdot moli$

e la massa $m = n \cdot M = 83 \cdot mol \cdot 28,016 \cdot g \cdot mol^{-1} = 2324 \cdot g$.

Per la seconda domanda, si può ricorrere ancora all'equazione di stato, che ci permette di calcolare la pressione p_1 alla temperatura $T_1 = 353,15°K$

$$p_1 = \frac{nR}{V} \cdot T_1 = \frac{p}{T} \cdot T_1 = \frac{10^7 \cdot N \cdot m^{-2}}{290,15°K} \cdot 353,15°K = 1,217 \cdot 10^7 \cdot N \cdot m^{-2}.$$

Poiché $1 N \cdot m^{-2} = 9,869 \cdot 10^{-6} \cdot atm$, si ottiene infine $p_1 = 120,1 \cdot atm$.

2) Si indichino con p_1, V_1, T_1 i parametri caratteristici dello stato iniziale. Saranno:

$$p_1 + 0,01 \cdot p_1; \quad V_1; \quad T_1 + 3;$$

i parametri caratteristici dello stato finale. Valgono le relazioni:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad \text{ed anche} \quad p_1 \cdot (1 + 0,01) \cdot V_1 = nR \cdot (T_1 + 3)$$

dividendo membro a membro otteniamo:

$$1,01 = \frac{T_1 + 3}{T_1}$$

dalla quale si ricava $T_1 = 300°K$.

3) La spinta di Archimede si valuta con la formula:

$$S = \rho \cdot g \cdot V$$

essendo ρ la densità dell'aria a $20°C$, g il valore dell'accelerazione di gravità, V il volume dell'uomo. La densità si calcola dividendo il peso molecolare per il volume occupato da una mole. A $0°C$ è:

$$\rho_0 = \frac{28{,}8 \cdot g \cdot mol^{-1}}{22{,}414 \cdot litri} = 1{,}285 \cdot g \cdot litri^{-1} = 1{,}285 \cdot kg \cdot m^{-3}$$

a $20°C$ il volume occupato da una mole $(n = 1)$ sarà:

$V = \frac{RT}{p}$ e, ricordando che la pressione è 1 atm e che vogliamo il volume in litri ($R = 0{,}08206 \cdot litri \cdot atm \cdot mol^{-1} \cdot °C^{-1}$), allora:

$$V = \frac{0{,}08206 \cdot litri \cdot atm \cdot mol^{-1} \cdot °K^{-1} \cdot 293{,}15°K}{1 \cdot atm} = 24{,}056 \cdot litri$$

e quindi:

$$\rho = \frac{28{,}8 g \cdot mol^{-1}}{24{,}056 \cdot litri} = 1{,}197 \cdot kg \cdot m^{-3}.$$

Sostituendo nell'espressione della spinta S si ottiene:

$$S = \rho \cdot g \cdot V = 1{,}197 \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot m \cdot s^{-2} \cdot 70 \cdot 10^{-3} \cdot m^3 = 0{,}822 \cdot N = 83{,}804 \cdot g_p.$$

4) Lo stato iniziale del gas, supposto perfetto, all'interno del recipiente, è caratterizzato dai seguenti parametri:

$V_0 = 10 \cdot litri$ $\qquad$ $p_0 = 1 \cdot atm$ $\qquad$ $T_0 = 300°K$

Dall'equazione di stato si ricava il numero di moli d'aria presenti nel recipiente:

$$n_0 = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$$

Dopo l'introduzione di $m = 50g$ di azoto, avente peso molecolare $M = 28$, il numero di moli diventa

$$n = n_0 + \frac{m}{M}$$

L'equazione di stato applicata allo stato finale in cui $V = V_0$ e $T = 273°K$, fornisce il valore della pressione finale

$$pV_0 = \left(n_0 + \frac{m}{M}\right)RT \quad \text{da cui ricaviamo} \quad p = \left(\frac{p_0 V_0}{RT_0} + \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{RT}{V_0} = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0}$$

Numericamente, con facili calcoli, si ottiene $p = 4{,}92 \ \ atm$.

5) I volumi occupati dai due gas valgono rispettivamente

$$V_1 = \frac{n_1 RT}{p_1} \qquad\qquad V_2 = \frac{n_2 RT}{p_2}$$

L'equazione di stato, quando le bombole sono state poste in comunicazione e la temperatura è tornata quella iniziale, si scrive

$$p \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot RT$$

Sostituendo le espressioni di V_1 e V_2 otteniamo

$$p \cdot \left(\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} \right) = n_1 + n_2 \qquad \text{dalla quale si ricava} \qquad p = (n_1 + n_2) \cdot \frac{p_1 p_2}{n_1 p_2 + n_2 p_1}$$

cioè, numericamente

$$p = 8 \cdot mol \cdot \frac{10 \cdot atm \cdot 3 \cdot atm}{9 \cdot mol \cdot atm + 50 \cdot mol \cdot atm} = 4{,}068 \cdot atm .$$

6) Trattando l' O_2 come un gas perfetto si ha $pV = nRT$. Nel caso particolare è:

$$n = \frac{5000}{32} \cdot mol \qquad\qquad T = 293°K \qquad\qquad V = 30 \cdot litri$$

ne segue, numericamente, $p = \dfrac{nRT}{V} = 125{,}6 \cdot atm$

Per applicare l'equazione di Van der Waals basta tenere presente che il volume v disponibile per una mole sarà:

$$v = \frac{V}{n} = 0{,}192 \cdot litri \qquad \text{ne segue:} \qquad p = -\frac{a}{v^2} + \frac{RT}{v - b} = 113{,}6 \cdot atm$$

Come si vede, la differenza è notevole.

7) La pressione dell'aria, prima del capovolgimento del tubo, è quella atmosferica aumentata della pressione idrostatica esercitata dal mercurio. Quindi essa vale

$$p_0 + d \cdot g \cdot h$$

Dopo il capovolgimento, la pressione interna sarà

$$p_0 - d \cdot g \cdot h$$

Indicata con s la sezione del tubo si possono scrivere le equazioni nei due stati

$$(p_0 + d \cdot g \cdot h) \cdot s \cdot l = nRT \qquad\qquad (p_0 - d \cdot g \cdot h) \cdot s \cdot l' = nRT$$

Uguagliando i primi membri, poiché la temperatura è la stessa, otteniamo

$$p_0 = d \cdot g \cdot h \cdot \frac{l'+l}{l'-l} = 75 \cdot mm_{Hg} = 0{,}99 \cdot atm.$$

8) La temperatura di equilibrio viene calcolata uguagliando la quantità di calore ceduta da 14 litri d'acqua a $20°C$ a quella necessaria per portare il ghiaccio a $0°C$, farlo fondere ed elevare la temperatura dell'acqua di fusione al valore d'equilibrio. Deve cioè essere

$$14 \cdot 1 \cdot (20 - t) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 20 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 1 \cdot t$$

(per semplicità nell'equazione non sono state indicate le unità di misura, ciò per un fatto di leggibilità, ma è chiaro il significato fisico di tutti i suoi termini). Da questa equazione si ricava facilmente $t = 6{,}25°C$.

9) Il pezzetto di rame, raffreddandosi dalla temperatura iniziale t_0 fino a $0°C$, cede una quantità di calore

$$Q = m \cdot c \cdot t_0 = d \cdot V \cdot c \cdot t_0$$

avendo indicato con m e V rispettivamente la massa e il volume del pezzetto di rame. Per fondere una massa $m_1 = d_1 \cdot V$ di ghiaccio occorre una quantità di calore

$$Q_1 = c_f \cdot m_f = c_f \cdot d_1 \cdot V$$

Dovendo essere $Q = Q_1$, si ha

$$d \cdot V \cdot c \cdot t_0 = c_f \cdot d_1 \cdot V$$

dalla quale si ricava

$$t_0 = \frac{c_f \cdot d_1}{c \cdot d} = 93°C.$$

10) L'equazione di Van der Waals si scrive, per una mole di gas

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = RT$$

il volume v occupato da una mole può essere ricavato dai dati iniziali. Abbiamo, infatti,

$$n = \frac{m}{M} = 25 \cdot mol \quad \text{e quindi:} \quad v = \frac{10}{25} = 0{,}4 \cdot litri .$$

Sostituendo nella precedente equazione i dati del problema e il valore di v calcolato si ottiene (per semplicità nell'equazione non sono state indicate le unità di misura, ciò per un fatto di leggibilità, ma è chiaro il significato fisico di tutti i suoi termini):

$$\left(p + \frac{1{,}345}{0{,}4^2} \right) \cdot (0{,}4 - 0{,}0322) = 0{,}0823 \cdot 300$$

con p misurato in atmosfere si trova facilmente: $p = 58{,}7 \cdot atm$.

11) La pressione P della miscela gassosa contenuta nel cilindro vale (riportando le misure in grandezze S.I., con ovvio significato dei valori numerici)

$$P = P_0 + \frac{p}{S} = P_0 + \frac{m \cdot g}{S} = \left(1{,}013 \cdot 10^5 + \frac{10 \cdot 9{,}81}{10^{-2}} \right) \cdot N \cdot m^{-2} = 1{,}111 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m^{-2}$$

Tale pressione è somma delle pressioni parziali P_1 e P_2 esercitate dall'aria e dall'idrogeno. Possiamo scrivere, indicando con n_1 e n_2 le moli di aria e di idrogeno, con V il volume occupato dalla miscela, con T la temperatura assoluta

$$(1) \quad P_1 = \frac{n_1 RT}{V}$$

$$(2) \quad P_2 = \frac{n_2 RT}{V}$$

$$(3) \quad P = \frac{(n_1 + n_2) \cdot RT}{V}$$

Dividendo m. a m. la (1) con la (3) e la (2) con la (3) otteniamo

$$P_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot P \qquad\qquad P_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot P$$

Ma è (si osservi che il peso molecolare dell'idrogeno è $M_2 = 2$)

$$n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_1}{M_2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = \frac{m_1}{M_2} \cdot d = 0{,}0248 \cdot mol$$

$$n_2 = \frac{m_2}{M_2} = 0{,}05 \cdot mol$$

per cui sostituendo nelle espressioni di P_1 e P_2 e tenendo conto del valore di P , si ottiene infine

$$P_1 = 0,368 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m^{-2} \qquad\qquad P_2 = 0,743 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m^{-2}.$$

12) Dall'equazione di stato, supponendo il gas perfetto, si può ricavare

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = 1,56 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m^{-2}$$

Il calcolo della pressione idrostatica si effettua ricordando che essa è data da $d \cdot g \cdot h$, essendo d la densità del fluido in questione e h la profondità rispetto al livello del fluido. Per un punto sulla faccia superiore del recipiente è

$$p_1 = 0 \ ;$$

per un punto sulla faccia inferiore del recipiente è

$$p_2 = d \cdot g \cdot h = 2 \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot 9,81 \cdot m \cdot s^{-2} \cdot 1 \cdot m = 1,96 \cdot N \cdot m^{-2}.$$

La massima variazione di pressione all'interno del recipiente vale perciò

$$\Delta p = 1,96 \cdot N \cdot m^{-2}$$

che è un valore del tutto trascurabile rispetto alla pressione p del gas calcolata senza tener conto delle variazioni dovute alla gravità.