

ELEMENTI DI MECCANICA QUANTISTICA.

Appunti a cura del prof. Nicola SANTORO.

Non è possibile ignorare quasi completamente (come spesso accade) la Fisica Moderna, all'interno di un corso di studi per il quinto anno di un liceo scientifico (sperimentale o no), soffermandosi a trattare soltanto la Fisica Classica. In questi appunti si accenna, allora, seppur con la dovuta sintesi, alla Meccanica Quantistica privilegiandone l'aspetto fenomenologico, evitando così di introdurre soltanto complicati ed astratti formalismi¹ e ponendo, talvolta, l'accento sui fatti storici. Il recente sviluppo (poderoso) dell'elettronica dei semiconduttori, unito ad un interesse sempre crescente verso la moderna tecnologia digitale, non possono che giustificare (ampiamente) un tale tipo di scelta.

Introduzione. Mentre, nei primi anni del 1900, Einstein gettava le basi della teoria della relatività sottoponendo a serrata critica principi fino ad allora ritenuti basilari per la conoscenza fisica, contemporaneamente Planck, De Broglie, Heisenberg, Schrödinger, ed in seguito Dirac, iniziano una approfondita analisi sulla natura della materia e sui suoi modi di essere e di propagarsi.

Fino ad allora si sapeva con chiarezza che la materia non aveva struttura continua e che non era suddivisibile all'infinito; si stava individuando l'atomo quale costituente delle molecole, che la nascente scienza chimica aveva rivelato, ed era stata postulata la sua struttura, consistente in un *nucleo* comprendente gran parte della sua massa, e in *elettroni* propagantisi in orbite chiuse attorno al nucleo; si era giunti anche a misurare, con buona precisione, la massa dell'elettrone ($m_e \cong 9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) e la sua carica elettrica ($e \cong 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$), e questo si configurava come il più piccolo elemento di materia fino ad allora osservato.

Nello stesso tempo si ripensava criticamente la natura della luce e della radiazione elettromagnetica in genere, ed il fatto assai sconcertante che le esperienze compiute sui fenomeni luminosi avevano condotto Newton ed Huyghens a formulare due ipotesi contrastanti sulla natura della luce, l'ipotesi corpuscolare e l'ipotesi ondulatoria.

In effetti, la luce, in alcune manifestazioni rivelava una natura tipicamente corpuscolare, in altre, invece, una natura tipicamente ondulatoria.

Ora, l'ipotesi ondulatoria spiegava compiutamente i fenomeni di interferenza e di diffrazione della radiazione luminosa, e la sua propagazione rettilinea, ed era suffragata dalla teoria del campo elettromagnetico elaborata da Maxwell; l'ipotesi corpuscolare, d'altronde, spiegava compiutamente i fenomeni denominati *effetto Compton* ed *effetto fotoelettrico* in base ai quali si era accertato con assoluta chiarezza che gli elettroni, colpiti da radiazioni luminose, si comportavano come se fossero stati colpiti da particelle materiali aventi una ben determinata energia e quantità di moto, ubbidendo così alle leggi dell'urto meccanico.

Ma la sorpresa fu ancora maggiore quando fu accertato che non solo la radiazione elettromagnetica presentava indiscutibili effetti corpuscolari, ma anche la materia si comportava, talvolta, in modo ondulatorio; infatti, esperienze condotte su fasci di elettroni, e successivamente su fasci di atomi e di molecole incidenti su un cristallo o interagenti tra loro, davano luogo agli stessi fenomeni di diffrazione ed interferenza tipici delle radiazioni elettromagnetiche, quasi che la materia si propagasse *per onde*.

In conclusione, si poté a buon diritto affermare che tanto la materia che la radiazione elettromagnetica hanno in sé la duplice natura di particella-onda.

¹ Lo stile dei vari paragrafi è abbastanza piano e lineare, con la sola eccezione dell'ultimo che riporta qualche sviluppo analitico per l'equazione di Schrödinger. Pertanto, se si ritiene più opportuno, tale paragrafo in prima lettura può anche essere tralasciato.

La difficoltà di comprendere questo fatto è legata alla nostra stessa struttura mentale, che vorrebbe applicare a livello microscopico le sensazioni ed i concetti di *onda* e di *corpo materiale* acquisiti separatamente nella comune esperienza quotidiana. Ora, l'osservazione finale di un fenomeno è, da parte dell'uomo, sempre a livello macroscopico, e le sue percezioni sono tali da distinguere nettamente e distintamente gli effetti di tipo corpuscolare da quelli di tipo ondulatorio; ma, evidentemente, ciò non può autorizzarci ad estendere tale distinzione alla causa primaria dei fenomeni, che, essendo a livello microscopico, non è direttamente osservabile con i nostri sensi.

L'esperienza fisica ci insegna, quindi, che occorre diffidare delle nostre percezioni individuali: l'unica percezione cui ci si possa affidare è quella mentale, consistente nella elaborazione di teorie fisico-matematiche della realtà, suffragate da una accurata verifica e corrispondenza ad esse dei fatti sperimentali oggettivamente osservabili.

Le ipotesi quantistico-ondulatorie. L'inadeguatezza della teoria cinetica dei gas nella spiegazione del comportamento dei calori specifici al variare della temperatura, ed altre gravi discrepanze tra teoria classica² e fatti sperimentali osservate nella emissione della radiazione da parte dei corpi, condussero Planck alla formulazione di una nuova ipotesi: *l'energia, di qualunque tipo, non viene emessa (e non si propaga) con continuità, ma solamente "per granuli", per quantità discrete, dette "quanti", di grandezza pari a*

$$E = h\nu$$

dove h è una costante universale (detta costante di Planck, del valore $h \cong 6,62608 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) e ν è la frequenza della radiazione associata alla emissione energetica.

Questa ipotesi, veramente rivoluzionaria, che introduceva il concetto di *atomicità* nel regno dell'energia, si è dimostrata di enorme importanza per la elaborazione delle nuove teorie sul reale comportamento della materia.

Ad esempio, permise a Bohr di rielaborare il suo modello di atomo di idrogeno e di spiegare lo spettro energetico emesso, anche se, solo dopo una più completa formulazione della ipotesi ondulatoria, eseguita successivamente da Schrödinger, si poté risolvere l'analogo problema per gli altri atomi.

Un principio fondamentale per l'ipotesi ondulatoria fu formulato nel 1923 da Louis De Broglie. In base ad esso si postula che *ad ogni elettrone, particella, o massa in movimento, è associato un moto ondulatorio che ne caratterizza la propagazione.*

Tale moto ondulatorio ha una lunghezza d'onda λ definita dalla relazione:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

² Già a partire dagli scorcio del secolo Diciannovesimo erano stati evidenziati alcuni fenomeni per i quali le leggi classiche portavano a risultati in disaccordo con quelli sperimentali. Era apparso evidente che per risolvere tali discrepanze occorreva una profonda revisione dei concetti di radiazione e materia. I fenomeni in questione, classicamente non spiegabili, erano stati incontrati in diversi settori della fisica. Alcuni di tali fenomeni sono elencati qui di seguito:

- la radiazione del corpo nero;
- l'effetto fotoelettrico;
- i calori specifici delle varie sostanze alle basse temperature;
- l'esistenza dei livelli energetici discreti degli atomi e delle molecole;
- la stabilità degli atomi (gli elettroni dovrebbero perdere energia per irraggiamento e finire sul nucleo atomico in tempi assai brevi) e, quindi, della materia;
- la struttura degli atomi e dei nuclei, nonché le loro proprietà meccaniche ed elettromagnetiche (massa, momento angolare, momento magnetico) e le loro interazioni (produzione, decadimento, reazioni).

ove h è la costante di Planck, e mv è la quantità di moto della massa in movimento.

Con questa ipotesi, le proprietà di corpo in movimento, come ad esempio quelle di un elettrone orbitante attorno al nucleo, debbono essere studiate tenendo conto della distribuzione delle onde ad esso associate.

Ciò che prima era considerato un problema meccanico, diviene ora un problema di moto ondulatorio.

L'interpretazione ondulatoria. Il primo tentativo di spiegare la doppia natura della materia in movimento fu fatto da Schrödinger, che trattò ogni elettrone come un *pacchetto d'onde*.

Comprenderemo meglio tale concetto considerando, per analogia, le onde elastiche (sonore). Sappiamo che se consideriamo, ad esempio, due onde sonore di differente lunghezza d'onda, ma propagantisi con la **stessa** velocità, durante il cammino le loro ampiezze possono sommarsi dando luogo a dei massimi, o sottrarsi dando luogo a dei minimi. Questi massimi e minimi appartengono ad un'onda che si muove nello spazio con la stessa velocità delle due onde considerate. Se consideriamo, invece, due onde sonore di velocità **differenti**, la velocità dei massimi e dei minimi propagantisi è diversa da quella delle onde componenti. Se, infine, consideriamo numerosi *treni d'onda*, ognuno con una velocità ed una lunghezza d'onda lievemente differente, questi si possono scegliere in modo tale che, facendoli interferire tra di loro, le vibrazioni si annullino ovunque, tranne che in una piccola porzione di spazio ove esse si sommano per formare ciò che viene chiamato un *pacchetto d'onde*. Tale pacchetto procede con una sua propria velocità, detta *velocità di gruppo*. I treni d'onda singoli, che abbiamo supposto muoversi con velocità lievemente differenti tra loro, si può considerare possiedano una velocità media, che viene detta *velocità di fase*.

Nella sua teoria, Schrödinger tratta l'elettrone come un pacchetto d'onde sorretto da una *onda guida*. Senza l'ipotesi dell'onda guida la teoria del pacchetto d'onde è insostenibile. L'*onda guida* è descritta dalla equazione di Schrödinger, che analizzeremo più avanti; fisicamente, questa equazione mette in relazione l'ampiezza dell'*onda guida* con la probabilità di trovare l'elettrone in un dato punto dello spazio. Ove l'ampiezza dell'*onda guida* è nulla, sussiste una infinitesima probabilità di trovarvi l'elettrone, e il pacchetto d'onde che lo rappresenta è nullo o fortemente sparpagliato.

Con questa trattazione, il processo meccanico costituito da un atto di moto è associato con un processo ondulatorio la cui ampiezza è collegata con la misura della probabilità dell'evento nel punto considerato; per una particella, il valore dell'ampiezza dell'onda guida è perciò trascurabilmente piccolo in tutti i punti tranne che nel pacchetto d'onde, all'interno del quale ci si può attendere di trovare la particella, che viaggia con la velocità di gruppo del pacchetto.

Così, il pacchetto d'onde e l'onda guida riuniscono le proprietà di una onda-particella muovendosi con la velocità di gruppo, e possono presentare tutti gli effetti di diffrazione ed interferenza, oltre a quelli corpuscolari.

Le proprietà di corpuscolo e di onda sono però strettamente complementari: una particella non può rivelarsi contemporaneamente come corpuscolo e come onda; essa agisce come l'uno o come l'altra in ciascun esperimento fisico³ che possa essere escogitato per rivelarne le proprietà.

Il principio di indeterminazione. Un principio di grande importanza venne proposto da Heisenberg nel 1927. Questo principio è una conseguenza diretta della natura dualistica della materia. Infatti, la effettiva definizione di corpuscolo in moto implica che in ogni istante esso abbia

³ A questo riguardo giova osservare che se si progetta un'esperienza che serve per mettere in risalto le caratteristiche di corpuscolo di una particella, si osserverà che il risultato evidenzierà, invece, la natura di onda e viceversa.

una quantità di moto definita e occupi una posizione definita nello spazio. Solo se si può determinare simultaneamente sia la quantità di moto che la posizione, possiamo effettivamente dire che è stata *osservata* una particella nel senso da noi presupposto, e che risente delle nostre concezioni e percezioni del macroscopico.

Diversamente, poiché la particella è in qualche parte all'interno di un pacchetto d'onde più o meno esteso, e si muove con la velocità di gruppo, nasce l'incertezza sulla velocità della particella, dal momento che il pacchetto non è infinitamente *compatto* e proprio la variazione della sua *compattezza* fa nascere, durante il suo moto, una distribuzione di velocità.

È quindi impossibile sapere **dove** si trova la particella e quale è la sua **esatta** velocità; per un pacchetto d'onde abbastanza lungo, con molti massimi, la posizione della particella è molto incerta, ma la velocità risulta pochissimo dispersa e si può conoscere con grande esattezza; in un pacchetto molto corto, mentre la posizione può essere ben determinata, è possibile dimostrare che la velocità risulta grandemente dispersa, e quindi indeterminabile. Può essere quindi provato che è *impossibile determinare con esattezza contemporaneamente la quantità di moto e la posizione di una particella*.

Heisemberg espresse quantitativamente il principio di indeterminazione affermando che *nell'universo l'azione minima osservabile oggettivamente è dell'ordine della costante di Planck*.

Come è noto, si intende per *azione* il prodotto di una energia per il tempo (dimensionalmente: $M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$) e la costante di Planck ha queste dimensioni.

Considerando una particella materiale in moto lungo la direzione x , detta x la sua coordinata e q_x la sua quantità di moto in un certo istante, per il principio di indeterminazione dobbiamo attribuire una incertezza Δx alla misura della coordinata, e una incertezza Δq_x alla misura della quantità di moto (che equivale in senso non relativistico, ad attribuire una incertezza Δv_x alla velocità della particella). Ora il prodotto $\Delta x \Delta q_x$ è una *azione*, e per il principio di Heisemberg dovremo scrivere:

$$\Delta x \Delta q_x \cong h$$

dalla quale si vede chiaramente che quanto più esatta è la misura della posizione x tanto più incerta è la v_x , e viceversa. Al limite, se la posizione di una particella è esattamente conosciuta ($\Delta x = 0$), non si può avere alcuna indicazione sul suo stato di moto ($\Delta q_x \rightarrow \infty$), e inversamente se $\Delta q_x = 0$ avremo $\Delta x \rightarrow \infty$, con una completa indeterminazione della posizione.

Facciamo un esempio quantitativo. Sappiamo che il raggio atomico è dell'ordine di 10^{-10} metri. Vediamo se un elettrone, la cui velocità possa essere misurata con una certa precisione, può o meno appartenere all'atomo e orbitare all'interno. Consideriamo un elettrone con $v_x \cong 10^6 m \cdot s^{-1}$, misurata con la precisione dell'1% ($\Delta v_x \cong 10^4 m \cdot s^{-1}$).

$$\text{Avremo: } \Delta x \cong \frac{h}{\Delta q_x} \cong 6,6 \cdot 10^{-8} m \quad \text{per cui l'indeterminazione sulla posizione dell'elettrone}$$

risulta almeno 600 volte maggiore del raggio atomico. Questa situazione non permette di affermare che in un dato istante quell'elettrone è all'interno dell'atomo.

Viceversa, se pensiamo di misurare ad un certo istante la velocità v_x con la approssimazione del 100 % (misura eccezionalmente grossolana), sarà $\Delta v_x \cong 10^6 m \cdot s^{-1}$, e risulterà $\Delta x \cong 6,6 \cdot 10^{-10} m$, cioè in questo caso si potrà ragionevolmente ammettere che l'elettrone orbiti nell'atomo, ma saremo nell'impossibilità di conoscere la sua velocità e quindi di seguire la sua traiettoria nel tempo.

Come si vede, il principio di Heisemberg pone una oggettiva limitazione alla possibilità di conoscenza e descrizione esatta dei fenomeni microscopici; le conseguenze filosofiche e scientifiche di questo principio sono di larga portata, poiché in base ad esso è necessario abbandonare la legge di causalità esatta nel senso classico. D'ora in poi, nelle scienze fisiche, alla

esattezza occorre ormai sostituire la *probabilità*; i fenomeni debbono essere descritti solo in termini di probabilità e di distribuzioni statistiche (ad esempio, casi ritenuti impossibili per la fisica classica, se trattati con le equazioni della meccanica quantistico-ondulatoria, si trova che hanno una probabilità molto piccola ma **finita** di accadere).

L'equazione delle onde di Schrödinger⁴. L'*onda guida* che obbedisce alla equazione di Schrödinger è stata necessaria per spiegare la non dissipazione del pacchetto d'onde caratterizzante il moto di una particella materiale. Per ricavarla, consideriamo l'equazione di propagazione delle onde elastiche lungo l'asse x . Questa è data da:

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2},$$

ove $S = S(x,t)$ è lo spostamento dell'elemento elastico e w è la velocità dell'onda.

La soluzione di questa equazione dà S come spostamento periodico nel tempo. Tra le soluzioni della equazione, c'è la soluzione *stazionaria*:

$$S(x,t) = \Psi(x) \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

ove $\Psi(x)$ è una funzione della sola x , e T è il periodo del moto.

Derivandola due volte rispetto a x e t , otteniamo:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \Psi \cos \frac{2\pi}{T} t; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Sostituendo nella equazione delle onde elastiche abbiamo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cos \frac{2\pi}{T} t = -\frac{4\pi^2}{w^2 T^2} \Psi \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

ovvero, essendo $\lambda = wT$ avremo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Psi = 0.$$

Fin qui il procedimento è generale; occorre ora introdurre nell'equazione il concetto base della ipotesi ondulatoria della materia, formulato da De Broglie, e cioè che la lunghezza d'onda λ sia effettivamente quella delle *onde di materia* collegate al moto di una particella di massa m e di velocità v , cioè $\lambda = \frac{h}{mv}$; avremo, sostituendo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \Psi = 0.$$

⁴ Per comprendere gli sviluppi analitici contenuti nel presente paragrafo si richiede una buona conoscenza del calcolo differenziale per funzioni di più variabili, e la nozione di integrale generalizzato.

Se la particella si muove in un campo di forze conservativo, sappiamo, dal principio di conservazione dell'energia meccanica, che:

$$T + U = \text{cost.}$$

ove la costante costituisce l'energia totale della particella, che indicheremo con E .

Essendo $T = \frac{1}{2}mv^2$, sostituendo nella equazione otterremo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \Psi = 0 .$$

Generalizzando questa equazione per includere il movimento dell'onda rispetto agli assi x , y , z , e ponendo simbolicamente:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} ,$$

otteniamo infine l'equazione delle onde di Schrödinger:

$$\nabla^2 \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \Psi = 0 .$$

In questa equazione $\Psi(x, y, z)$ rappresenta l'ampiezza (stazionaria!) dell'*onda guida* associata alla particella in movimento. Essa è una funzione complessa, collegata con la probabilità di individuare la particella in una certa porzione di spazio.

L'importanza pratica della equazione di Schrödinger risiede nel fatto che essa consente di determinare correttamente il comportamento statistico (e quindi a livello macroscopico) delle particelle materiali, e in particolar modo degli elettroni, anche nei casi in cui esso non sarebbe in alcun modo giustificabile secondo le leggi della meccanica classica.

Dallo sviluppo della teoria matematica, si può dedurre che la probabilità di trovare una particella in un dato volume infinitesimo dv è data da:

$$p = \Psi \Psi^* dv ,$$

ove Ψ^* è la funzione complessa coniugata della Ψ , ed è ugualmente una soluzione dell'equazione di Schrödinger. È evidente che se consideriamo un volume infinitamente esteso avremo la certezza che la particella vi è contenuta in un istante qualsiasi.

Dal punto di vista matematico, la *certezza* si ha quando la probabilità assume valore uguale ad uno; perciò dovrà essere (condizione di normalizzazione):

$$\int_0^{\infty} \Psi \Psi^* dv = 1 .$$

Conclusioni. La meccanica quantistica, nella sua implicazione ondulatoria, riesce ad interpretare la correlazione onda-corpuscolo, e offre numerose possibilità applicative. Tuttavia il suo maggior successo consiste nella interpretazione di tutti i fenomeni microscopici in generale, e particolarmente in quelli legati alle strutture atomiche e degli aggregati atomici e molecolari. Più recentemente, il fisico P. A. M. Dirac ha rielaborato l'intera meccanica quantistica, introducendo la correzione relativistica nella equazione di Schrödinger (mediante l'uso della massa relativistica) e riformulando l'intera teoria con l'aiuto di nuovi strumenti matematici che egli stesso ha contribuito a creare.

Ciò è stato di notevole importanza per la descrizione del comportamento delle particelle subnucleari che si creano in occasione di collisioni tra particelle elementari e nuclei atomici a causa della esplosione di questi ultimi.

BIBLIOGRAFIA

L. LOVITCH, S. ROSATI, *Fisica Generale*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1996;

FACOLTÀ DI INGEGNERIA – PISA, *Appunti dalle lezioni al Corso di Fisica 1°(Elettrotecnici ed Elettronici)*, Centro 2P, Firenze, 1982.